



João Paulo Canha da Silva

DETERMINAÇÃO DE CARGAS DE COLAPSO: ANÁLISE INCREMENTAL VERSUS ANÁLISE LIMITE

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil

Orientador: Professor Doutor Mário Vicente da Silva

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Corneliu Cismasiu
Arguente: Prof. Doutora Zuzana Dimitrovová
Vogal: Prof. Doutor Mário Vicente da Silva

Aos meus pais.

"Copyright" João Paulo Canha da Silva, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Resumo

A Análise Incremental e a Análise Limite são os principais métodos utilizados na determinação da máxima carga suportada por uma estrutura caracterizada por um comportamento plástico. O aparecimento de softwares de elementos finitos veio trazer uma enorme evolução neste campo.

Neste trabalho é avaliada a qualidade dos dois métodos procurando analisar-se dois aspectos fundamentais: a qualidade da solução e a sua eficiência. Utilizaram-se três softwares distintos, *ANSYS* e *Plaxis* para estudos preconizando uma análise incremental de carga e o software *SUBLIM3d* para estudos resultantes de uma análise limite, que tem como base da sua formulação o Teorema Cinemático.

Explorando as diferentes características destes softwares de elementos finitos, analisa-se um conjunto de problemas bidimensionais, contemplando diversos tipos de materiais com diferentes critérios de cedência, tendo como resultado final o estudo da carga de colapso e respectiva eficiência, medida em tempo de cálculo.

Abstract

Incremental Analysis and Limit Analysis are the main methods used for determining the maximum load supported by a structure characterized by a plastic behavior. The appearance of finite element softwares has brought significant development in this field.

This work evaluates the quality of both methods by analyzing two basic aspects: the solution's quality and the efficiency of the analysis. There are used three different softwares, *ANSYS* and *Plaxis* for studies advocating an incremental load analysis and *SUBLIM3d* software for studies resulting from a limit analysis, which is based in its formulation on the Kinematic Theorem.

Exploring the different characteristics of these finite element softwares, it is analyzed a set of known two-dimensional problems, covering various types of materials with different yielding criteria, resulting in the final study of the collapse load and its efficiency, measured in processing time.

Palavras Chave

Análise Limite

Análise Incremental

Teorema Cinemático

Plasticidade

Elementos Finitos

Keywords

Limit Analysis

Incremental Analysis

Kinematic (Upper Bound) Theorem

Plasticity

Finite Elements

Agradecimentos

A realização desta tese não seria possível sem o contributo directo ou indirecto de algumas pessoas, às quais eu gostaria de expressar o meu agradecimento.

Começo por agradecer ao meu orientador científico, o Professor Mário Vicente da Silva. Aqui expresso o meu sincero agradecimento pelo que me ensinou ao longo destes meses e pela forma organizada como me ajudou a desenvolver este trabalho. Revelou sempre uma capacidade muito grande de me incentivar a cumprir ao máximo tudo o que tínhamos idealizado para esta tese. Agradeço acima de tudo a enorme disponibilidade que sempre demonstrou e sem a qual este trabalho teria sido mais demorado.

Agradeço também aos meus amigos e colegas de estudo, Miguel, David, Filipe, Alvito e Roland, por tudo o que me ensinaram e ajudaram, não só ao longo da realização deste trabalho como também ao longo de todo o curso.

A todos os meus amigos, Araújo, Henrique, António e ao grupo todo pelas inúmeras horas de descontração e divertimento que me proporcionaram, sendo essenciais para encarar este desafio sempre com boa disposição.

Por último, agradeço à minha família, em particular aos meus pais, aos avós e à minha querida tia Carla, pelo carinho e força que sempre me transmitiram e que foi fundamental para percorrer este duro caminho.

Índice

Resumo	iii
Abstract	v
Palavras Chave	vii
Keywords	vii
Agradecimentos	ix
Lista de figuras	xv
Lista de tabelas	xix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objectivo	2
1.3 Metodologia	2
1.4 Organização do Documento	3
2 Fundamentos Teóricos	5

2.1	Noções de Plasticidade	6
2.2	Lei do Escoamento Plástico	7
2.3	Critérios de Cedência	9
2.3.1	Critério de von Mises	9
2.3.2	Critério de Tresca	10
2.3.3	Critério de Mohr-Coulomb	11
2.3.4	Critério de Drucker-Prager	11
2.4	Análise elasto-plástica incremental	12
2.5	Análise Limite	15
2.5.1	Teorema Cinemático ou da Região Superior	16
2.5.2	Teorema Estático ou da Região Inferior	17
2.5.3	Teorema da Unicidade	17
2.6	Problemas bi-dimensionais	17
2.6.1	Estado Plano de Tensão (EPT)	18
2.6.2	Estado Plano de Deformação (EPD)	19
3	Aplicações Numéricas	21
3.1	Placa com furo circular (EPT)	23
3.1.1	Modelação em ANSYS	24
3.1.1.1	Malhas triangulares de três nós	26
3.1.1.2	Malhas triangulares de seis nós	26
3.1.2	Modelação em <i>SUBLIM3d</i>	29
3.1.2.1	Malhas triangulares de três nós	30
3.1.2.2	Malhas triangulares de seis nós	31

3.1.2.3	Malhas triangulares de três nós melhoradas	32
3.1.2.4	Malhas triangulares de seis nós melhoradas	33
3.2	Viga em consola (EPT)	35
3.2.1	Modelação em <i>ANSYS</i>	35
3.2.1.1	Malhas triangulares de três nós	37
3.2.1.2	Malhas triangulares de seis nós	37
3.2.2	Modelação em <i>SUBLIM3d</i>	39
3.2.2.1	Malhas triangulares de três nós	40
3.2.2.2	Malhas triangulares de seis nós	40
3.3	Capacidade de carga de fundações superficiais (EPD)	42
3.3.1	Modelação em <i>ANSYS</i>	43
3.3.1.1	Malhas triangulares de seis nós	45
3.3.2	Modelação em <i>Plaxis</i>	46
3.3.2.1	Malhas triangulares de seis nós	48
3.3.2.2	Malhas triangulares de quinze nós	49
3.3.3	Modelação em <i>SUBLIM3d</i>	50
3.3.3.1	Malhas triangulares de três nós	51
3.3.3.2	Malhas triangulares de seis nós (T6-E)	52
3.3.3.3	Malhas triangulares de seis nós (T6-NE)	53
3.4	Bloco com entalhes (EPD)	55
3.4.1	Modelação em <i>ANSYS</i>	55
3.4.1.1	Malhas triangulares de seis nós	56
3.4.2	Modelação em <i>Plaxis</i>	57

3.4.2.1	Malhas triangulares de seis nós	58
3.4.2.2	Malhas triangulares de quinze nós	59
3.4.3	Modelação em <i>SUBLIM3d</i>	61
3.4.3.1	Malhas triangulares de três nós	62
3.4.3.2	Malhas triangulares de seis nós (T6-E)	63
3.4.3.3	Malhas triangulares de seis nós (T6-NE)	64
4	Análise dos Resultados	65
4.1	Placa com furo (EPT)	65
4.2	Viga em consola (EPT)	69
4.3	Capacidade de carga de fundações superficiais (EPD)	73
4.4	Bloco com entalhes (EPD)	75
5	Conclusões e desenvolvimentos futuros	79
5.1	Desenvolvimentos futuros	81
	Bibliografia	82

Lista de Figuras

2.1	a) Lei de endurecimento isotrópico b) Lei de endurecimento cinemático (retirado de [13])	7
2.2	Tipos de Escoamento: a) associado b) não associado (retirado de [13])	9
2.3	Superfície de Cedência de Tresca e de von Mises (retirado de [7]) . . .	10
2.4	Superfície de Cedência de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager (retirado de [4])	12
2.5	a) Lei constitutiva elástica-linear b) Lei constitutiva não linear (adaptado de [17])	13
2.6	Domínio dos carregamentos admissíveis (retirado de [19])	16
2.7	Representação geométrica do tensor das tensões no paralelepípedo elementar.	18
2.8	Representação geométrica do tensor das tensões no estado plano de tensão.	19
3.1	Placa com furo circular	23
3.2	Transformação do elemento quadrangular em triangular (retirado de [1])	25
3.3	Discretização da placa com furo no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.	26

3.4	Discretização da placa com furo no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	27
3.5	Mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	28
3.6	Campo de tensões para o problema da placa com furo circular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	28
3.7	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3. . .	30
3.8	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6. . .	32
3.9	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3. . .	33
3.10	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6. . .	34
3.11	Viga em consola sujeita a um carregamento de corte na sua extremidade (adaptado de [11])	35
3.12	Discretização da viga em consola no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.	37
3.13	Discretização da viga em consola no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	38
3.14	Mecanismo de colapso para o problema da viga em consola no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	39
3.15	Campo de tensões para o problema da viga em consola no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	39
3.16	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da viga em consola no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3.	41
3.17	Sapata rectangular	42

3.18	Discretização da sapata rectangular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	45
3.19	Discretização da sapata rectangular no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	48
3.20	Discretização da sapata rectangular no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15, para as três primeiras malhas estudadas.	49
3.21	Mecanismo de colapso para o problema da sapata rectangular no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15.	50
3.22	Campo de tensões para o problema da sapata rectangular no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15.	50
3.23	Discretização da sapata rectangular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.	51
3.24	Discretização da sapata rectangular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	53
3.25	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da sapata rectangular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6-NE. . . .	54
3.26	Bloco com entalhes (adaptado de [11])	55
3.27	Discretização do bloco com entalhes no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	57
3.28	Discretização do bloco com entalhes no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.	58
3.29	Discretização do bloco com entalhes no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15, para as três primeiras malhas estudadas.	59
3.30	Mecanismo de colapso para o problema do bloco com entalhes no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15.	60
3.31	Campo de tensões para o problema do bloco com entalhes no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15.	61

3.32	Discretização do bloco com entalhes no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.	62
3.33	Discretização do bloco com entalhes no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6-E, para as três primeiras malhas estudadas.	63
3.34	Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema do bloco com entalhes no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6.	64
4.1	Placa com furo: Convergência da solução.	66
4.2	Placa com furo: Tempo de cálculo.	66
4.3	Placa com furo: Convergência da solução.	68
4.4	Placa com furo: Tempo de cálculo.	68
4.5	Viga em consola: Convergência da solução.	70
4.6	Viga em consola: Tempo de cálculo.	70
4.7	Viga em consola: Comparação da convergência da solução obtida através de uma análise limite e estudos anteriores [11].	72
4.8	Sapata rectangular: Convergência da solução.	73
4.9	Sapata rectangular: Tempo de cálculo.	74
4.10	Bloco com entalhes: Convergência da solução.	76
4.11	Bloco com entalhes: Tempo de cálculo.	76

Lista de Tabelas

3.1	Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T3.	27
3.2	Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	28
3.3	Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3.	30
3.4	Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6.	31
3.5	Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> através da alteração do parâmetro utilizando elementos T3.	33
3.6	Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software <i>SUBLIM3d</i> através da alteração do parâmetro utilizando elementos T6.	34
3.7	Resumo das análises para o problema da viga em consola no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T3.	37
3.8	Resumo das análises para o problema da viga em consola no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	38
3.9	Resumo das análises para o problema da viga em consola no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3.	40

3.10	Resumo das análises para o problema da viga em consola no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6.	41
3.11	Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	46
3.12	Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T6.	48
3.13	Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15.	49
3.14	Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3.	52
3.15	Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6-E.	53
3.16	Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6-NE.	54
3.17	Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software <i>ANSYS</i> utilizando elementos T6.	57
3.18	Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T6.	59
3.19	Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software <i>Plaxis</i> utilizando elementos T15.	60
3.20	Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T3.	62
3.21	Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6-E.	63
3.22	Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software <i>SUBLIM3d</i> utilizando elementos T6-NE.	64

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A elaboração desta tese tem como principal objectivo a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Apesar de me sentir mais vocacionado para a área de Projecto de Estruturas de engenharia, a análise não linear de estruturas sempre me despertou algum interesse, especialmente utilizando formulações de elementos finitos, muito embora fosse um assunto novo para mim.

O cálculo estrutural linear elástico assume-se hoje em dia como uma abordagem bastante simples e útil, o que se traduz no projecto de engenharia em resultados aceitáveis. Contudo, o aparecimento de metodologias matemáticas avançadas associadas ao tratamento de fenómenos físicos já conhecidos, veio trazer motivação para o estudo do comportamento real das estruturas, visto que estas apenas se comportam, eventualmente, de forma linear para uma certa parte das solicitações suportadas, durante a sua vida útil. Isto verifica-se especialmente em estruturas que apresentem elevado grau de ductilidade e quando são sujeitas a um tipo de carregamento não cíclico.

Por vezes, é aconselhável uma análise não linear do comportamento de estruturas de elevado grau de complexidade, pois em muitos casos existe a comprovação, através de modelos analíticos ou resultado de observações efectuadas, que a abordagem utilizada para a resolução do problema se afasta em muito da realidade. Quer-se

com isto dizer que a normal consideração dos diagramas de esforços elásticos no projecto de uma estrutura pode traduzir-se num mau resultado, caso se tratem de estruturas com um comportamento mais complexo. Foi este ponto de vista científico que me fez despertar curiosidade pelo tema, acima de tudo por ser um assunto não muito falado ao longo do curso, o que me completa mais em termos de conhecimentos e de formação académica.

1.2 Objectivo

O objectivo principal desta tese consiste na determinação de cargas de colapso de estruturas, caracterizadas por um comportamento perfeitamente plástico, através da utilização de dois métodos distintos: um primeiro método que tem como base a determinação da carga última de uma estrutura a partir de uma análise elasto-plástica incremental e um segundo método que visa determinar esta mesma carga mas agora utilizando uma análise limite, nomeadamente o teorema cinemático ou teorema da região superior. Apesar de se tratarem de abordagens perfeitamente distintas estas coincidem na busca do mesmo resultado, onde é feito um estudo da qualidade da solução obtida pelos dois métodos e a sua respectiva eficiência, traduzida em tempo de cálculo.

1.3 Metodologia

Para que este objectivo seja cumprido com sucesso, utilizaram-se três tipos de softwares de elementos finitos, correntes no âmbito da engenharia civil, nomeadamente os softwares *ANSYS*[1] e *Plaxis*[2] quando implementada uma análise incremental da carga de colapso e o software *SUBLIM3d*[3] quando estudada a mesma carga agora através de uma abordagem baseada no teorema cinemático da análise limite. Assim, analisaram-se diversos problemas 2D, estruturando uma ideia semelhante para cada um:

- i. Implementação do problema nos softwares *ANSYS* e *Plaxis* quando efectuada uma análise elasto-plástica incremental da carga de colapso da estrutura;

- ii. Implementação do problema no software *SUBLIM3d* quando determinada da carga de colapso da estrutura através de uma análise limite;
- iii. Consideração do comportamento plástico do material utilizando os dois métodos;
- iv. Estudo da eficiência dos métodos através da análise do tempo de cálculo do problema.

Procedeu-se à análise dos resultados obtidos através da aplicação dos diferentes métodos, não só comparando-os entre si, em termos de qualidade da solução da carga última e respectivo tempo de cálculo, como também comparando-os com estudos anteriormente realizados por outros autores.

1.4 Organização do Documento

O presente documento encontra-se estruturado em 5 capítulos. Para além deste capítulo inicial de introdução, onde foi apresentada a motivação, objectivo do trabalho e a sua metodologia, apresentam-se os restantes capítulos desta tese e a descrição sumariada do seu conteúdo.

Capítulo 2. Procede-se à apresentação de conceitos fundamentais que foram tidos em conta neste trabalho. Como tal, são revistos alguns conceitos importantes referentes à Teoria da Plasticidade. São também apresentados conceitos fundamentais da Análise Limite importantes no enquadramento teórico desta tese. Por outro lado, é feita uma breve descrição das estruturas quando o seu comportamento pode ser analisado segundo um estado de tensão plana ou estado de deformação plana.

Capítulo 3. Neste capítulo são apresentados os diferentes estudos efectuados através da utilização dos três tipos de softwares anteriormente referidos. Será abordado como foi efectuada a aplicação dos pressupostos teóricos nas diversas opções destas ferramentas práticas e serão apresentados os resultados obtidos nos diversos estudos, para a carga de colapso e respectivo tempo de cálculo.

Capítulo 4. O principal objectivo deste capítulo assume-se como a comparação dos resultados obtidos no capítulo anterior. Será analisada a qualidade da solução obtida e a respectiva eficiência, comparando-os entre si e com estudos realizados por outros autores. São apresentadas as principais conclusões do trabalho e são fornecidas as principais explicações referentes aos resultados obtidos.

Capítulo 5 Neste último capítulo faz-se uma breve revisão do que foi efectuado ao longo do trabalho e das principais conclusões a retirar, apresentando-se também algumas sugestões para futuros desenvolvimentos nesta área.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

A determinação de cargas de colapso assume hoje em dia um papel importante no dimensionamento estrutural. Os softwares de elementos finitos vieram trazer uma enorme evolução a este campo, pois possibilitaram resolver problemas analiticamente complicados com bastante eficácia. Por outro lado, a constante evolução tecnológica permite o aparecimento de novos e diferentes tipos de softwares de determinação de cargas últimas de estruturas. Este trabalho surge neste contexto, no sentido em que será estudada a qualidade de dois métodos diferentes, tendo como base, na determinação de cargas de colapso, a utilização de softwares de elementos finitos.

Neste capítulo será apresentado um enquadramento teórico desta tese, com o objetivo de descrever de forma completa o problema em estudo. Para tal, será feita uma revisão de conceitos relacionados com a Teoria da Plasticidade [7], abordando também os Teoremas da Análise Limite. Será também efectuada uma revisão teórica sobre a análise elasto-plástica incremental. Por último serão recordados alguns conceitos relacionados com problemas bidimensionais, nomeadamente comportamentos em estados planos de tensão e estados planos de deformação.

Em primeiro lugar, referem-se alguns conceitos globais tidos em conta ao longo deste documento. Considerou-se válido o princípio da linearidade geométrica, garantindo-se a hipótese dos pequenos deslocamentos. Teve-se em consideração que todas as deformações fora do domínio elástico teriam um comportamento plástico perfeito sem endurecimento ou amolecimento. Os materiais são isotrópicos e não existem efeitos de inércia devido à aplicação do carregamento em condições quase estáticas.

Admite-se um comportamento dúctil dos materiais. A independência do tempo e da temperatura é também adoptada.

2.1 Noções de Plasticidade

A caracterização do comportamento plástico de um material é definida pelo estado das tensões através do seu *critério de cedência*, que na sua forma mais geral se apresenta do seguinte modo:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad (2.1)$$

Esta formulação estabelece uma *superfície de cedência*, $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$, definida através de uma função escalar do tensor das tensões, que representa os estados de tensão considerados admissíveis.

Para que ocorram deformações plásticas do material é necessário que o estado de tensão se encontre sobre a superfície de cedência, ou seja, que a igualdade na condição (2.1) seja verificada. Se tal não acontecer o material apresenta, localmente, um comportamento em regime elástico mantendo-se as deformações plásticas constantes.

Contudo, no caso mais genérico pode-se admitir que a superfície de cedência inicial possa sofrer alterações quando se verifiquem deformações plásticas. Este fenómeno está relacionado com a dilatação ou contracção da superfície de cedência, mantendo apesar disto a sua forma e origem no espaço das tensões. Esta dilatação conduz a um aumento de resistência do material denominado endurecimento isotrópico [Figura 2.1 a)]. Analogamente, verifica-se que, quando exista uma contracção da superfície de cedência, existe uma diminuição da resistência do material, fenómeno este denominado por amolecimento. Pode acontecer estar-se perante um caso de a superfície de cedência inicial apenas sofrer translações, no sentido das deformações plásticas, mantendo-se inalterada a sua geometria inicial [Figura 2.1 b)]. A este fenómeno dá-se o nome de endurecimento cinemático e é comum utilizar-se quando se pretende modelar fenómenos em que se verifique o efeito de *Bauschinger*[7].

Assim, a superfície de cedência de um material não depende só do estado das tensões, passando também a ser função do estado de endurecimento do material, α ,

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = 0 \quad (2.2)$$

Contudo, neste trabalho considerou-se que o material apresentava um comportamento perfeitamente plástico, ou seja, a função f torna-se independente deste último parâmetro, $\alpha = 0$, de maneira que os pontos no interior da superfície permanecem em estado elástico, enquanto que os pontos sobre a superfície se encontram no estado plástico.

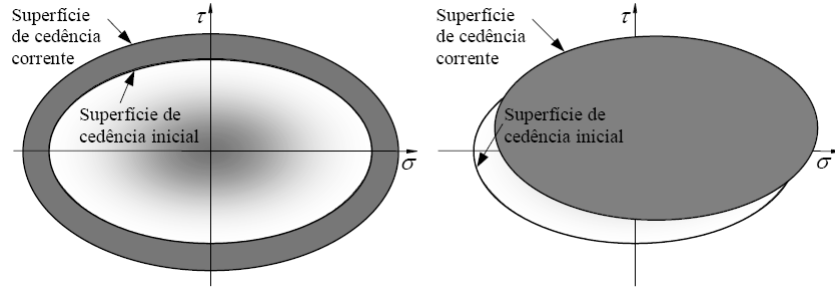


Figura 2.1: a) Lei de endurecimento isotrópico b) Lei de endurecimento cinemático (retirado de [13])

2.2 Lei do escoamento Plástico

Na secção anterior foram definidas as condições necessárias para um determinado material entrar em regime plástico. Contudo, a maneira como se processa o escoamento não foi descrito, ou seja, o quanto as deformações plásticas se desenvolvem para um dado estado de tensão. Numa teoria de elasto-plasticidade envolvendo pequenas deformações, é habitual decompor-se o tensor das deformações numa componente elástica, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$, e numa componente plástica, $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$, permitindo quantificar separadamente os fenómenos físicos relacionados com elasticidade e plasticidade.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (2.3)$$

sendo que a parcela $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ representa todas as deformações plásticas residuais que permanecem no material após retirado o carregamento. Segundo a Teoria da Elasticidade, consegue-se estabelecer uma relação entre as deformações elásticas e o campo de tensões, através das habituais equações constitutivas (2.4).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (2.4)$$

sendo que $\underline{\underline{C}}^e$ representa o tensor de quarta ordem que armazena as características elásticas e $\underline{\underline{\sigma}}$ o campo de tensões. O campo das deformações elásticas do material é representado por $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$.

Por outro lado, tal já não se verifica quando se entra no regime plástico, onde essas leis perdem fundamentação e deixa de ser possível estabelecer uma relação entre o campo de deformações plásticas e o campo de tensões. Assim, torna-se mais adequado exprimir a relação constitutiva através de uma nova grandeza, denominada taxa de deformação plástica, $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$.

A partir desta grandeza surge uma outra denominada potencial plástico, $Q(\underline{\underline{\sigma}})$. O potencial plástico é uma função escalar do tensor das tensões a partir do qual os incrementos de deformação plástica podem ser determinados por derivação parcial em ordem às componentes do tensor das tensões. Este permite estabelecer uma relação importante com a taxa de deformação plástica.

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \xi \frac{\partial Q(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \quad \xi \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.5)$$

Deste modo, do ponto de vista geométrico, a condição (2.5) garante que a taxa das deformações plásticas é normal à superfície do potencial $Q(\underline{\underline{\sigma}})$. Por outro lado, o espaço de valores a que ξ está compreendido permite que o sentido das deformações plásticas se faça para o exterior da mesma superfície. Deste modo, pode dizer-se que se está perante uma lei de escoamento associado, quando se verifica a igualdade $Q(\underline{\underline{\sigma}}) = f(\underline{\underline{\sigma}})$, conforme se ilustra na Figura 2.2. Neste trabalho, utilizou-se uma lei de fluxo associada, garantindo assim que a condição de normalidade fosse verificada em qualquer ponto do espaço de tensões,.

Dado que os mecanismos de rotura dos materiais são todos diferentes, não existe um critério de cedência universal que possa ser aplicado a todos eles. Por exemplo, genericamente faz-se uma distinção entre os materiais puramente atríticos e materiais coesivos, pelo que faz sentido estabelecer um critério de cedência diferente para cada um deles.

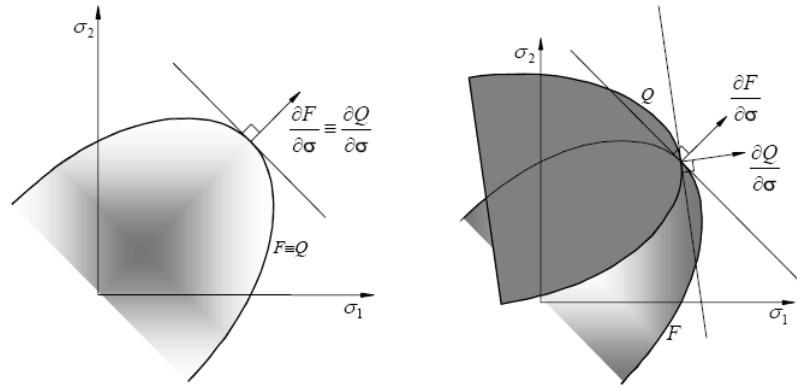


Figura 2.2: Tipos de Escoamento: a) associado b) não associado (retirado de [13])

2.3 Critérios de Cedência

Nesta secção serão apresentados os quatro critérios de cedência mais comuns. Será efectuada uma breve descrição sobre cada um deles, descrição esta acompanhada pela representação gráfica das respectivas superfícies de cedência.

2.3.1 Critério de von Mises

O critério de von Mises define que um determinado material entra em cedência quando a seguinte condição deixa de ser verificada:

$$\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \leq Y^2 \quad (2.6)$$

onde $Y = \sqrt{3}k$, em que k representa a tensão de corte de cedência obtida num ensaio de tracção uniaxial.

Por outro lado, o âmbito dos estudos efectuados nesta dissertação inserem-se sobre casos planos de tensão, podendo a expressão (2.6) ser reduzida ao seguinte:

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 \leq Y^2 \quad (2.7)$$

2.3.2 Critério de Tresca

A função que define a superfície de cedência de Tresca é dada pela seguinte expressão:

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2c \quad (2.8)$$

onde, c representa a coesão do material.

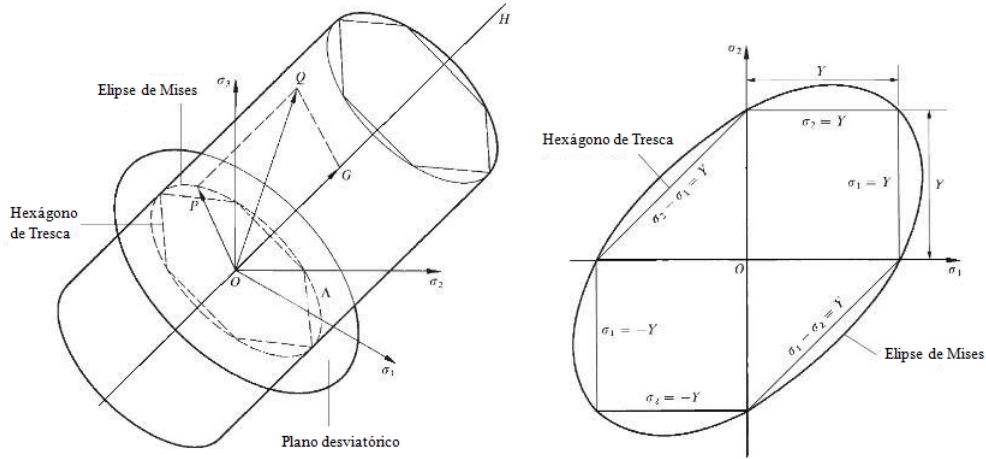


Figura 2.3: Superfície de Cedência de Tresca e de von Mises (retirado de [7])

O critério de cedência de Tresca num estado plano de tensão ($\sigma_{III} = 0$)¹, representado na Figura 2.3, pode ser delimitado pelas seguintes linhas rectas:

$$\sigma_I = \pm Y \quad \sigma_{II} = \pm Y \quad \sigma_I - \sigma_{II} = \pm Y \quad (2.9)$$

Observe o leitor a planificação da elipse de von Mises e o hexágono de Tresca apresentados na Figura 2.3. Verifique que a elipse de Mises circunscreve o hexágono de Tresca para uma tensão de cedência uniaxial Y , podendo afirmar-se que o critério de Tresca é de entre eles o mais conservativo, pois este encontra-se envolvido pela elipse de von Mises.

¹Este conceito será abordado mais tarde na secção 2.6.

2.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

O critério de cedência de Mohr-Coulomb é normalmente utilizado para modelar o comportamento de materiais granulares. Este pode ser definido pela seguinte expressão:

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_I(1 + \sin \phi) - \sigma_{III}(1 - \sin \phi) - 2c \cos \phi \quad (2.10)$$

onde ϕ representa o ângulo de atrito interno do material.

É interessante verificar que no caso de o ângulo de atrito interno ser nulo, $\phi = 0$, a superfície de cedência de Mohr-Coulomb deixa de ser uma pirâmide hexagonal, passando a ser um prisma de igual base, o que significa que quando tal acontece, este critério coincide com o critério de Tresca. Neste caso, a superfície de cedência passa a ser representada pela seguinte expressão (2.8)

2.3.4 Critério de Drucker-Prager

Por último apresenta-se o critério de Drucker-Prager. A expressão que define a sua superfície de cedência é apresentada abaixo e pode ser visualizada na Figura 2.4.

$$f(\underline{\sigma}) = 3\alpha\sigma_m + \sqrt{J_2} - k' \quad (2.11)$$

em que os coeficientes α e k' são constantes do material e dependem do ângulo de atrito interno (ϕ) e da coesão (c) e σ_m representa a tensão média:

$$k' = \frac{6c \times \cos \phi}{\sqrt{3} \times (3 - \sin \phi)} \quad (2.12)$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} \times (3 - \sin \phi)} \quad (2.13)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.14)$$

Acrescenta-se que J_2 , (2.15), representa o simétrico do segundo invariante das tensões de desvio. Por outro lado, chama-se a atenção do leitor para a situação em que o ângulo de atrito interno seja nulo, $\phi = 0$, o que significa que a superfície de

cedência de Drucker-Prager deixa de ser cônica, passando a coincidir com o cilindro de von Mises, como mostra a Figura 2.4.

$$J_2 = \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \quad (2.15)$$

Ainda em relação ao simétrico do segundo invariante das tensões de desvio, J_2 , o critério de cedência de von Mises sugere que um dado material entra em cedência quando este invariante atinge o seu valor crítico. Como tal, o critério de von Mises pode ser expresso em função de J_2 , através da relação (2.16).

$$Y = \sqrt{J_2} - k \quad (2.16)$$

em que k representa, como foi referido anteriormente em (2.6), a tensão de corte de cedência obtida num ensaio de tracção uniaxial.

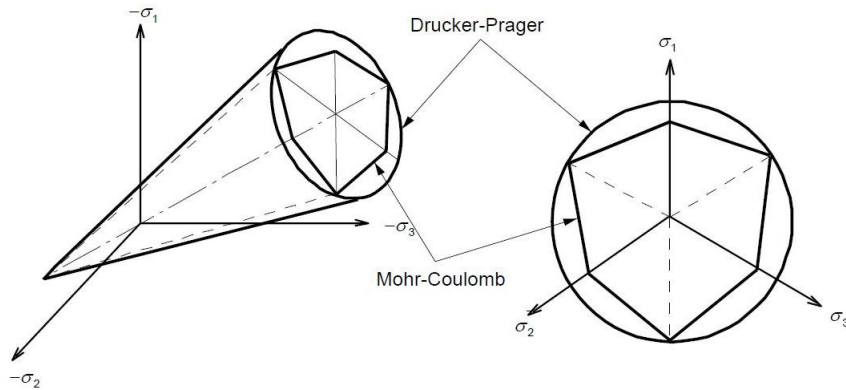


Figura 2.4: Superfície de Cedência de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager (retirado de [4])

2.4 Análise elasto-plástica incremental

A análise elasto-plástica incremental é hoje um dos principais métodos, senão o principal, utilizados na determinação de cargas de colapso de estruturas, em regime plástico, tendo como base os conceitos definidos pela Teoria da Plasticidade. Este método consiste na aplicação de um determinado número de incrementos de carga na estrutura, conduzindo a um aumento progressivo de zonas de plastificação até

que haja ocorrência do colapso da estrutura.

Como foi referido anteriormente, quando se entra no campo da plasticidade, as leis constitutivas que permitiam definir o problema em regime elástico deixam de ser válidas. Neste caso, considerando um material elasto-plástico, as leis a aplicar são não lineares, pois o tensor que relaciona a tensão com a deformação é função do estado de tensões. Tendo como base este aspecto, a relação constitutiva deve ser definida estabelecendo uma relação entre incrementos de tensões e incrementos de deformações, como mostra a Figura 2.5.

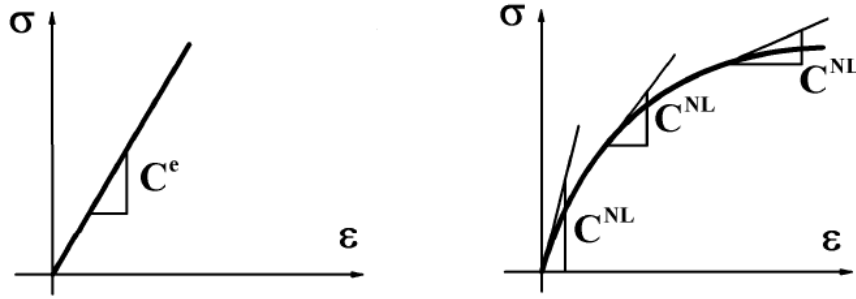


Figura 2.5: a) Lei constitutiva elástica-linear b) Lei constitutiva não linear (adaptado de [17])

Se $D^{NL} = f(\sigma)$ for a representação tensorial de um dada lei constitutiva não linear e $C^{NL} = g(\sigma)$ for o seu inverso, as relações entre incrementos de tensão e incrementos de deformação podem ser descritas pelas equações (2.17) e (2.18).

$$d\sigma = C^{NL}(\sigma) : d\epsilon \quad (2.17)$$

$$d\epsilon = D^{NL}(\sigma) : d\sigma \quad (2.18)$$

Note o leitor que, a maior dificuldade reside na definição dos incrementos a efectuar especialmente no patamar referente ao regime plástico. Mais concretamente neste trabalho, como se tratam de análises não lineares utilizando softwares de elementos finitos, faz sentido abordar este tema relacionando-o com a sua respectiva implementação computacional. Os tipos de integração mais utilizados são aqueles que utilizam a regra do ponto-médio. Esta abordagem passa pela linearização das equações plásticas, por séries de Taylor. A convergência para a solução correcta é conseguida através da subdivisão dos incrementos de tensão ou deformação em parcelas mais pequenas. Assim, estes processos incrementais podem ser definidos na

sua forma mais simples como métodos lineares que resultam da conjugação de vários passos de carga, variando consoante a resposta ao último carregamento aplicado, ou seja, estando ou não em regime plástico.

Não querendo aprofundar muito este tema, destacam-se alguns autores que permitiram a evolução deste processo incremental no âmbito de modelos de elementos finitos. Um dos primeiros processos utilizados foi desenvolvido por *Gear* [9], em 1971, que consistia na aplicação destes pressupostos através da utilização de sistemas algébricos de equações diferenciais. Outros autores foram desenvolvendo algoritmos nesta área, sendo hoje em dia o esquema de integração Newton-Raphson o mais utilizado em softwares de elementos finitos para determinar novos estados de tensão ou deformação, actualizando o tamanho da superfície de plastificação (*Sloan* [20]). Como se trata de um método de primeira ordem, a qualidade do resultado da integração numérica só será adequada se os incrementos de deformação forem pequenos. Este esquema utiliza as primeiras derivadas da função de potencial plástico (2.5). Mais tarde estes algoritmos foram aplicados à integração das relações elasto-plásticas que utilizam os critérios de cedência, anteriormente referidos na secção 2.3, sendo portanto os aplicados neste trabalho através da utilização dos softwares, de análise elasto-plástica, *ANSYS* e *Plaxis*.

Contudo, a análise da carga de colapso, considerando um comportamento perfeitamente plástico, falha em certo ponto. Ora, a hipótese de plasticidade perfeita não permite que a carga aplicada na estrutura aumente de forma ilimitada. Este acontecimento iria conduzir ao aparecimento de um certo número de zonas de deformação plástica, obtendo-se um fluxo plástico ilimitado na estrutura e culminando, assim, no colapso plástico. A análise feita tendo como base tal hipótese é denominada de Análise Limite, e a carga na qual acontece a falha é chamada de carregamento limite.

2.5 Análise Limite

A Análise Limite assume-se como um método bastante utilizado na determinação de cargas de colapso de sistemas mecânicos, tendo como base a Teoria da Plasticidade. Este tipo de análise tem como objectivo, em termos de projecto de engenharia, a optimização de estruturas mais leves, mais resistentes e económicas, evitando também a não ocorrência do colapso plástico de uma estrutura. Este método pode ser classificado como um método directo de determinação de cargas de colapso, no sentido em que não envolve uma análise passo a passo, ao contrário da análise incremental, ou seja, apenas no instante em que ocorre o colapso plástico é que as informações sobre o mecanismo de colapso e o diagrama de tensões podem ser obtidas.

Deste modo, começa-se por definir o que é o colapso de um determinado sistema, Ω , caracterizado por um comportamento elasto-plástico perfeito. Considere-se um carregamento *admissível*, \underline{Q} , ou seja, um carregamento para o qual se obtém um campo de tensões equilibrado e que verifica a condição de cedência (2.1), em todo o seu domínio. O campo de tensões diz-se equilibrado, quando a distribuição de tensões satisfaz as condições de equilíbrio (2.19), no seu domínio e na fronteira, (2.20).

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (2.19)$$

em que b_j representa a componente, na direcção j , do vector das forças de massa b .

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = t_j \quad (2.20)$$

onde n é a normal ao exterior em relação a Ω e t o conjunto de forças de fronteira.

Assim, considera-se que um carregamento não é suportável, quando para um dado carregamento admissível possam ocorrer deformações plásticas incontroláveis na estrutura. De um modo geral, pode-se definir para um conjunto genérico de carregamentos, \underline{Q}_i , uma região para o quais são considerados admissíveis, como se pode observar na Figura 2.6. Observe o leitor que, todos os carregamentos fora da área delimitada na figura são considerados inadmissíveis e que naturalmente os que se encontrarem dentro dessa mesma área são considerados admissíveis. O conjunto de carregamentos que se encontre sobre a linha delimitadora da área representada são

considerados carregamentos limite.

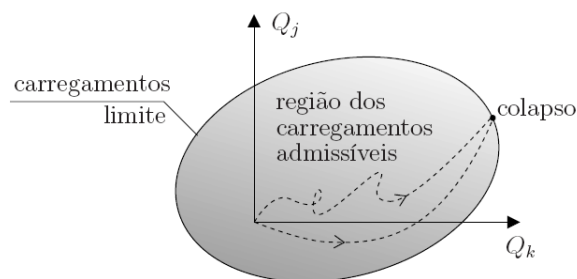


Figura 2.6: Domínio dos carregamentos admissíveis (retirado de [19])

Deste modo, apresentam-se algumas propriedades dos carregamentos limite:

- i A carga de colapso não é influenciada pela trajectória de carregamento (demonstrado pelas trajectórias a tracejado na Figura 2.6);
- ii São independentes das características elásticas do material, ou seja, as deformações elásticas não influenciam a carga de colapso;
- iii Determinação directa dos seus majorantes e minorantes, sendo desnecessária a resolução do problema passo a passo a partir do seu estado inicial conhecido;
- iv São independentes das tensões iniciais.

Neste âmbito surgem os teoremas da Análise Limite, que permitem determinar uma aproximação da carga de colapso exacta, através de uma abordagem pelo interior e pelo exterior do seu domínio.

2.5.1 Teorema Cinemático ou da Região Superior

O teorema da região superior diz que se, para um dado mecanismo de colapso que seja cinematicamente admissível, o trabalho provocado pelo carregamento exterior aplicado no sistema for igual ao trabalho das tensões internas, então o carregamento aplicado causa o colapso [10].

2.5.2 Teorema Estático ou da Região Inferior

O teorema da região inferior diz que se, um determinado carregamento exterior está em equilíbrio com as tensões internas e que em nenhum ponto violam o critério de rotura (2.1), então o carregamento exterior aplicado não causa o colapso [10].

2.5.3 Teorema da Unicidade

O teorema da unicidade diz que se, para um determinado carregamento exterior, for possível verificar simultaneamente os Teoremas Estático e Cinemático, então esse carregamento é necessariamente um carregamento limite.

2.6 Problemas bi-dimensionais

Muitos problemas de engenharia podem ser tratados de forma simplificada, neste caso, fazendo uma aproximação do problema real, de três dimensões, a um caso de duas dimensões apenas. Existem dois tipos de problemas que envolvem uma análise plana, nomeadamente análise plana de tensões e análise plana de deformações. O tipo de análise é definido consoante o problema em estudo, dependendo essencialmente da sua geometria. Deste modo, são definidos alguns pressupostos e restrições no que diz respeito ao campo de tensões e ao campo de deslocamentos.

Em primeiro lugar, apresenta-se o tensor das tensões e o tensor das deformações, (2.21), para um problema genérico de três dimensões. Note-se que as componentes dos tensores são simétricas em relação à sua diagonal principal. A representação geométrica do tensor das tensões pode ser visualizada na Figura 2.7.

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

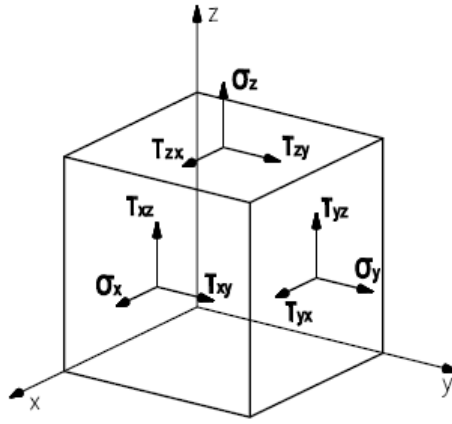


Figura 2.7: Representação geométrica do tensor das tensões no paralelepípedo elementar.

2.6.1 Estado Plano de Tensão (EPT)

Como foi referido anteriormente, a definição da melhor abordagem simplificada do problema depende fundamentalmente da geometria da estrutura e do carregamento aplicado. Habitualmente, está-se perante um caso típico de estado plano de tensão quando uma das dimensões é muito menor que a outra, isto é, a estrutura é muito fina, onde as tensões geradas segundo esta dimensão são muito menores do que as tensões das outras duas dimensões, podendo assim ser desprezadas e consideradas nulas. Logo, esta simplificação permite efectuar uma análise do campo de tensões no plano.

A representação geométrica do tensor das tensões é agora apenas uma das faces do cubo elementar, podendo ser visualizada na Figura 2.8. Apresenta-se de seguida o que acontece ao campo de tensões e ao campo de deformações quando efectuadas estas aproximações, (2.22).

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Note o leitor que as tensões associadas à menor dimensão são nulas, isto é, $\sigma_{zz} = 0$, como também todas as tensões de corte cruzadas com esta direcção, $\sigma_{zx} = 0$ e $\sigma_{zy} = 0$, no caso de a menor dimensão ser segundo a direcção z. Note o leitor que, no que

diz respeito ao campo de deformações, por efeito de poisson, têm que existir deslocamentos segundo esta direcção, $\varepsilon_{zz} \neq 0$, anulando assim a respectiva componente de tensão.

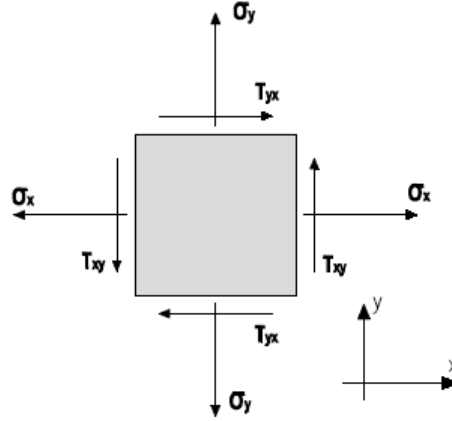


Figura 2.8: Representação geométrica do tensor das tensões no estado plano de tensão.

2.6.2 Estado Plano de Deformação (EPD)

Por outro lado, está-se perante um caso típico de estado plano de deformação quando uma das dimensões da estrutura é muito maior que as outras duas, dimensão esta normalmente associada ao comprimento de uma determinada estrutura. Isto significa, que os deslocamentos segundo essa dimensão são muito menores do que os deslocamentos das outras duas, podendo ser desprezados e considerados nulos.

Logo, esta simplificação permite efectuar uma análise do campo das deformações no plano. Apresenta-se de seguida o que acontece ao campo de tensões e ao campo de deformações quando efectuadas estas aproximações, (2.23).

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

Note o leitor que as deformações associadas à maior dimensão são nulas, isto é, $\varepsilon_{zz} = 0$, como também todas as deformações cruzadas com esta direcção, $\varepsilon_{zx} = 0$ e $\varepsilon_{zy} = 0$, no caso de a maior dimensão ser segundo a direcção z. Observe que,

no que diz respeito ao campo de tensões, tem que existir tensões segundo esta direcção, $\sigma_{zz} \neq 0$, com o intuito de anular a respectiva componente de deformação, ou seja, impedindo que se realizem deslocamentos segundo z .

Capítulo 3

Aplicações Numéricas

No presente capítulo procede-se à apresentação detalhada dos modelos de elementos finitos estudados. Antes de prosseguir com esta apresentação convém voltar a referir o objectivo deste trabalho que se centrou no estudo da eficiência e qualidade da solução, na determinação de cargas de colapso de estruturas, tendo como base dois pressupostos distintos. Por um lado, procurou-se determinar a carga última ou de colapso através de uma análise incremental de carga e, por outro lado, através de uma abordagem que tem como base os teoremas da análise limite.

No que diz respeito aos estudos relativos a uma análise incremental, utilizaram-se dois softwares comerciais de elementos finitos, correntes no âmbito da engenharia civil, nomeadamente o *ANSYS* e o *Plaxis*. A formulação utilizada com o auxílio destes softwares será apresentada ao longo deste capítulo, bem como a comparação com os resultados obtidos entre eles, sempre que tal foi possível. Em oposição, a busca da carga de colapso de um dado problema, através de uma análise limite foi conseguida recorrendo ao software desenvolvido por Vicente da Silva[19], denominado *SUBLIM3d*. Como já foi referido anteriormente, este software tem como base na sua formulação os teoremas clássicos da análise limite, mais em concreto o teorema cinemático ou teorema da região superior.

Para facilitar a compreensão do leitor, procurou-se dividir este capítulo em duas secções fundamentais. Esta divisão diz respeito ao estudo de problemas caracterizados por um comportamento de estado plano de tensão e estado plano de deformação. Serão analisados dois problemas de cada tipo e apresentar-se-á isoladamente

os pormenores da sua modelação em cada um dos softwares e respectivos resultados obtidos. No final de cada problema estudado serão apresentados os resultados mais importantes provenientes dos três softwares. As principais conclusões poderão ser consultadas no capítulo seguinte, onde se fará uma discussão mais profunda dos resultados obtidos.

O primeiro problema estudado consiste numa placa fina com um furo circular, submetida a um carregamento uni-axial. Este é um exemplo clássico bastante corrente e que foi analisado por diversos autores através de diversos métodos [15, 18, 22].

Outro dos problemas abordados e que segue o mesmo comportamento de EPT do estudo anterior, trata-se de uma viga em consola sujeita a uma carga distribuída de corte na sua extremidade. A determinação da sua carga de colapso foi estudada por alguns autores mas apenas obtendo resultados através de teoremas de análise limite, em particular o teorema estático e o teorema cinemático[11].

O terceiro e quarto estudos efectuados dizem respeito a problemas com um comportamento de EPD. O primeiro trata-se de uma sapata rectangular sujeita a uma carga distribuída uni-axial, ao longo de uma determinada largura, simulando o carregamento proveniente do pilar. Este tipo de problemas apresenta um apreciável grau de dificuldade na obtenção da sua solução analítica, pois os mecanismos de colapso são complexos.

O último problema estudado trata-se de um bloco com entalhes sujeito a uma carga distribuída uni-axial de tracção. A sua solução exacta não é conhecida, mas alguns autores determinaram os seus limites superiores e inferiores usando os mesmos teoremas da análise limite[11].

Outro aspecto importante trata-se de que nas discretizações efectuadas, em qualquer um dos softwares, apenas se utilizaram elementos finitos triangulares 2D. Foram utilizadas apenas malhas uniformes, o que significa que não houve um refinamento particular em determinados locais, mas sim um refinamento progressivo e global em toda a estrutura.

Chama-se a atenção do leitor para o facto de apenas se utilizar o software *Plaxis* nos dois últimos exemplos, quando efectuada uma análise elasto-plástica incremental de problemas em EPD. Isto deve-se ao facto de se tratar de um programa de cálculo automático direccionado especialmente para problemas geotécnicos, ou seja,

problemas que são normalmente analisados segundo um comportamento de estado plano de deformação. Como tal, este software não permite analisar problemas com comportamento de EPT.

Por último, refere-se que todos os cálculos foram determinados sempre no mesmo computador¹, no sentido de garantir igualdade de circunstâncias das análises nos diferentes softwares, já que um dos propósitos deste trabalho é o estudo de eficiência, em termos de tempo de processamento.

3.1 Placa com furo circular (EPT)

Neste primeiro estudo, considerou-se uma placa rectangular com um furo circular no seu centro, representada na Figura 3.1. As suas características permitem considerar este problema como estado plano de tensão, uma vez que uma das suas dimensões é muito menor que as outras duas. Esta é constituída por um material homogéneo isotrópico regulado pelo critério de cedência de von Mises. Na discretização deste problema foram utilizadas seis malhas de elementos triangulares de três nós e seis malhas de elementos triangulares de seis nós, em qualquer um dos softwares. Pretende-se determinar o valor da carga de colapso, p , quando sujeita a uma carga uni-axial de tracção.

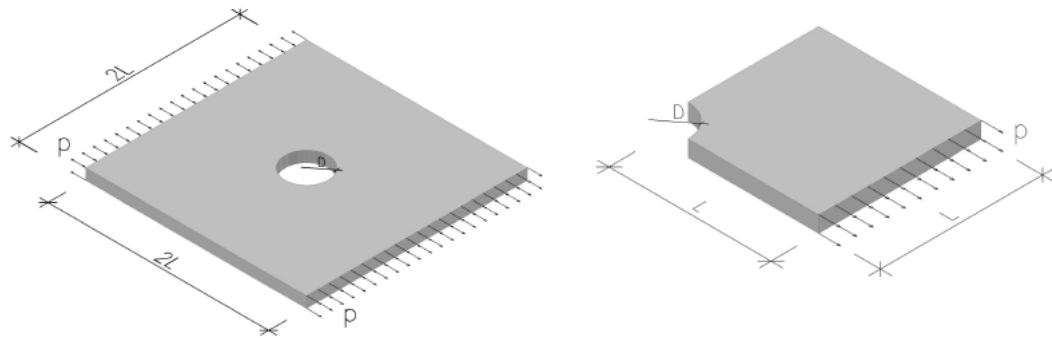


Figura 3.1: Placa com furo circular

Devido às propriedades de simetria geométricas e de carregamento, apenas foi modelado um quarto da placa. A solução exacta deste problema é conhecida e foi obtida

¹Processador: Intel Core2 Duo P8400 (2.26 GHz e 2.27 GHz), Memória(RAM): 4.00 GB, Sistema Operativo: Windows Vista Home Premium 32 Bits

por F.A.Gaydon[8], para uma relação de $D/L = 0.2$ entre o diâmetro da placa e o seu comprimento. Na discretização da placa utilizaram-se elementos triangulares de três e seis nós, onde os primeiros são caracterizados por se tratarem de elementos de deformação constante e os segundos por deformação linear.

3.1.1 Modelação em ANSYS

No estudo deste primeiro problema, utilizando o software *ANSYS*, existiram diversos aspectos preponderantes na sua modelação. Colocando de parte a questão da modelação geométrica, a escolha do tipo de elementos a utilizar na discretização da placa foi alvo de especial atenção. Utilizaram-se elementos planos bidimensionais, ou seja, sem espessura, dado que se considerou o problema em causa como EPT.

Outro aspecto diz respeito ao número de graus de liberdade por nó. No estudo da carga de colapso da placa, quando sujeita à força p , interessa definir como graus de liberdade os deslocamentos segundo as duas direcções do plano (x,y). Procurou-se também garantir que o elemento a utilizar tinha capacidades plásticas e que tinha um comportamento de EPT.

Assim, utilizaram-se os elementos quadriláteros Plane42 e Plane82 para as malhas triangulares de três nós e triangulares de seis nós. Note o leitor que acabam de ser descritos elementos quadriláteros para malhas triangulares. Isto acontece pois o *ANSYS* na definição dos elementos só tem disponível elementos quadrangulares, devendo-se alterar para triangulares nas propriedades da malha. Por definição, o software sobrepõe um dos nós, no caso de malhas triangulares de três nós e sobrepõe dois nós no caso de malhas triangulares de seis nós, conseguindo-se assim modelar com elementos triangulares, como representado na Figura 3.2. Para melhor percepção e facilidade de leitura, as malhas triangulares de três nós serão apresentadas pelas siglas T3 e as malhas triangulares de seis nós pelas siglas T6.

Como foi referido anteriormente, o material utilizado neste problema é um material isotrópico e segue o critério de cedência de von Mises. Para a definição deste tipo de material foi necessário fornecer determinadas características. Tratando-se de uma análise perfeitamente plástica, considerou-se uma placa de aço com um patamar elástico linear caracterizado por um módulo de elasticidade, $E = 210$ GPa e coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$. No que diz respeito à capacidade plástica do material,

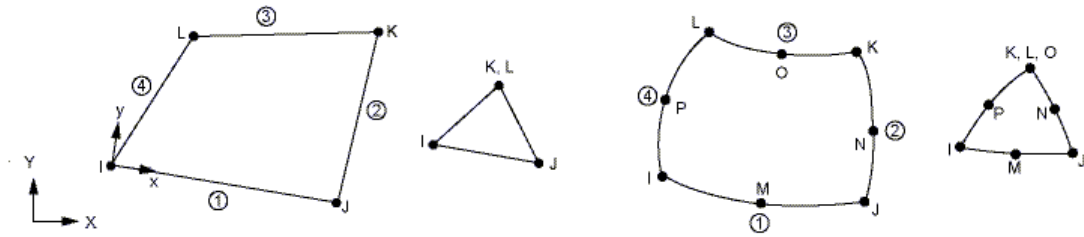


Figura 3.2: Transformação do elemento quadrangular em triangular (retirado de [1])

utilizou-se uma tensão de cedência correspondente a um aço S235, ou seja, $\sigma_0 = 235$ MPa. Refere-se no entanto que as propriedades elásticas escolhidas para o material poderiam ter sido outras, dado que estas em nada afectam o valor final da carga de colapso.

Para garantir que o critério de cedência de von Mises era aplicado, o material escolhido no *ANSYS* foi o regulado pelo critério de Drucker-Prager, com particular atenção ao facto de garantir que o ângulo de atrito, ϕ , tome o valor zero. Outro aspecto prende-se em assegurar que as deformações são sempre perpendiculares à superfície de escoamento e que o seu vector aponta sempre para fora, isto é, que a lei de fluxo é associada. Para tal, considerou-se que o ângulo de dilatância, ψ , que define o ângulo que o vector das deformações faz com a normal da superfície de rotura, era também nulo, conseguindo com isto aplicar este princípio de normalidade.

Para aplicar uma análise não linear neste software, existem parâmetros importantes para na sua implementação. Em primeiro lugar, é importante recordar o leitor que se irá proceder a uma análise incremental, querendo com isto dizer que é necessário definir os parâmetros incrementais da carga, ou seja, especificar o número de incrementos de carga a serem executados. Este software faz automaticamente o passo de carga consoante a resposta do material ao último carregamento efectuado, necessitando-se apenas de definir um ponto de partida, ou seja, a primeira parcela de carga a ser aplicada. Então, definiu-se que o primeiro carregamento seria 1/20 da carga total, sendo os restantes incrementos feitos de forma automática.

Outro aspecto importante é a consideração do valor total de carga a ser aplicada. Chama-se a atenção do leitor que é necessário aplicar uma carga de valor suficientemente grande, que cause garantidamente o colapso. Por outro lado, a aplicação de uma carga demasiadamente grande conduz a uma imprecisão do resultado final, pois

estão a ser considerados maiores incrementos de carga e consequentemente maiores probabilidades de se ultrapassar a carga de colapso exacta. Assim, houve a preocupação de reduzir os erros relativos ao valor a tomar para a carga aplicada. O estudo em causa não oferece grandes problemas em relação a este aspecto, pois a solução exacta da placa é conhecida [8]. Note-se também que este tipo de análise é efectuada considerando o princípio dos pequenos deslocamentos. O resultado obtido desta análise é o coeficiente multiplicador da carga de colapso, λ , que não é mais do que o valor, que multiplicado pela carga aplicada, corresponde à parcela do carregamento que causou a rotura da placa. O resultado obtido para a carga de colapso, P_u , é apresentado nas tabelas para os diferentes estudos efectuados.

3.1.1.1 Malhas triangulares de três nós

No que diz respeito à discretização da placa, foram utilizadas seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de três nós. Na Figura 3.3 são apresentadas as três primeiras malhas estudadas, sendo as restantes fruto de um maior refinamento. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.1.

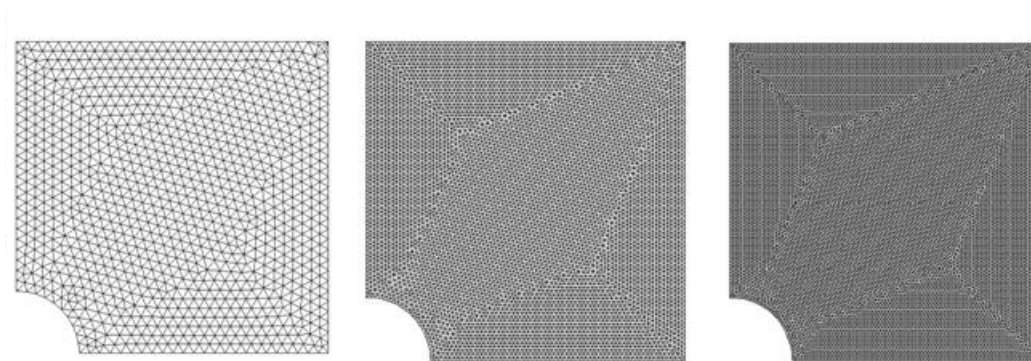


Figura 3.3: Discretização da placa com furo no software *ANSYS* utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.

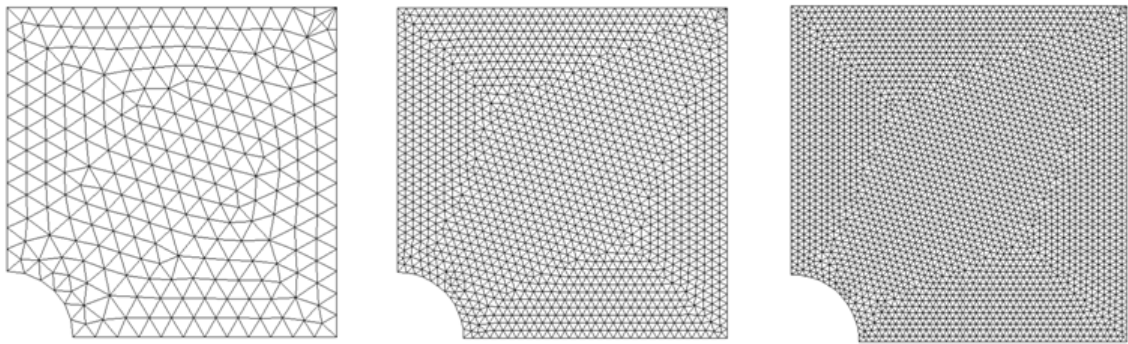
3.1.1.2 Malhas triangulares de seis nós

Por outro lado, no caso de malhas T6, procurou-se de alguma forma garantir um critério justo de comparação com as malhas T3. Para tal, assegurou-se que o número

Tabela 3.1: Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software *ANSYS* utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/σ_0	Solução exacta [8]	Erro (%)
1	T3	1966	2036	9	191.250	0.814		1.7
2	T3	12412	12586	50	191.250	0.814		1.7
3	T3	22136	22386	80	190.125	0.809	0.8	1.1
4	T3	49916	50264	220	188.219	0.801		0.1
5	T3	78148	78584	480	188.219	0.801		0.1
6	T3	102236	102734	725	188.219	0.801		0.1

de graus de liberdade destas era equivalente. Este será o principal critério de comparação de malhas neste problema, quer nos estudos realizados em função da qualidade da solução, quer em termos de tempo de processamento das diversas análises. Assim, foram efectuados estudos para seis malhas não estruturadas T6, apresentando-se na Figura 3.4 as primeiras três discretizações efectuadas. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.2.

Figura 3.4: Discretização da placa com furo no software *ANSYS* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Apresenta-se agora os melhores resultados obtidos na análise incremental para a melhor malha, malha 6, no que diz respeito à deformada e campo de tensões da placa, no instante de colapso, podendo ser consultados na Figura 3.5 e 3.6, respectivamente. Outro facto importante é o de as propriedades elásticas do material não influenciarem o valor final da carga de colapso, mas sim os respectivos deslocamentos. Para melhor percepção do mecanismo de colapso, a sua representação gráfica diz respeito ao estudo efectuado para a primeira malha.

Tabela 3.2: Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/σ_0	Solução exacta [8]	Erro (%)
1	T6	494	2048	11	189.075	0.805	0.8	0.6
2	T6	3094	12522	35	189.075	0.805		0.6
3	T6	5490	22192	70	189.394	0.806		0.7
4	T6	12412	49996	175	188.000	0.800		0.0
5	T6	19436	78180	325	188.000	0.800		0.0
6	T6	25516	102564	414	188.000	0.800		0.0

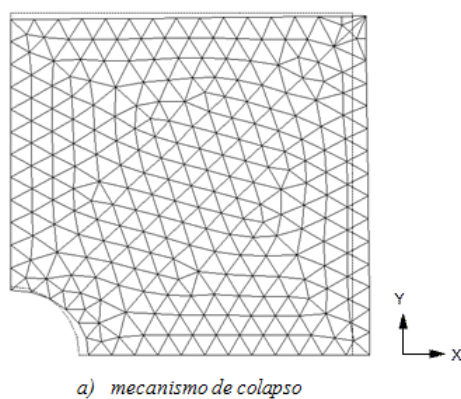


Figura 3.5: Mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

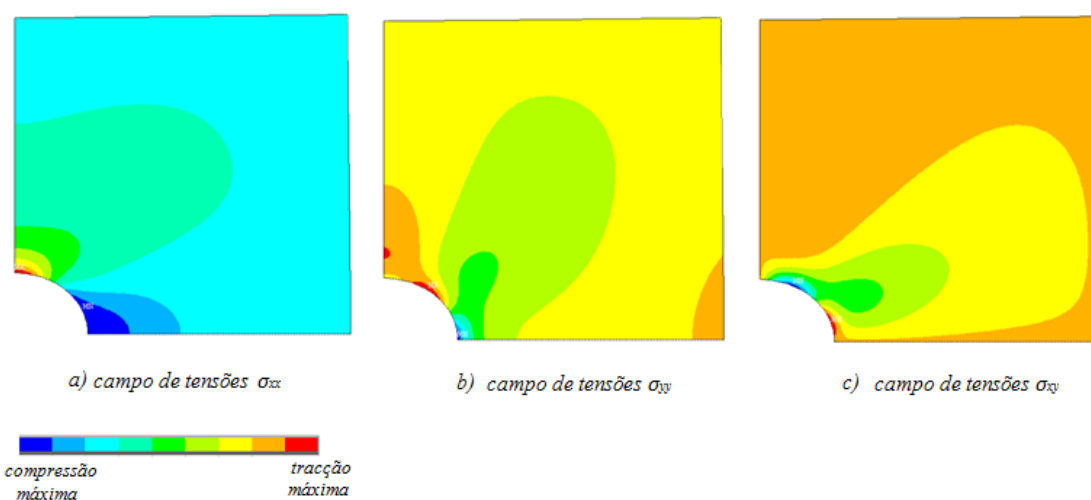


Figura 3.6: Campo de tensões para o problema da placa com furo circular no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

Note o leitor, que apesar de se apresentarem estes resultados apenas no momento de colapso, neste tipo de análise, podem ser consultadas as mesmas grandezas, para qualquer valor de carga que não cause o colapso da estrutura, durante a análise.

3.1.2 Modelação em *SUBLIM3d*

No sentido de se efectuar uma abordagem do problema diferente da análise incremental usada anteriormente, utilizou-se o software *SUBLIM3d*. Como já foi referido, através deste tipo de software obter-se-à uma estimativa da carga última tendo como base o teorema cinemático da análise limite. Assim, espera-se que os resultados obtidos sejam majorantes da carga de colapso, ou seja, espera-se que os dados obtidos se aproximem da solução exacta da placa por valores superiores a esta.

Antes de se apresentarem os resultados obtidos, é importante explicar alguns aspectos relativos à utilização deste software. Em primeiro lugar, a geometria e a malha são criadas no software *ANSYS*, ou seja, o *SUBLIM3d* funciona apenas como um código de cálculo, não tendo um modo de pré-processamento para a modelação geométrica.

No *SUBLIM3d*, o processo iterativo é controlado por um parâmetro de penalidade, r_0 , que influencia a velocidade de convergência da solução. A influência do parâmetro no comportamento deste software é um estudo que se encontra fora do âmbito deste trabalho, contudo há que referir que não existe matematicamente uma maneira exacta para o estimar. Quer-se com isto explicar que existe uma gama de valores para r_0 , em que é necessário que o utilizador assuma um compromisso entre obter uma melhor qualidade da aproximação ou melhor tempo de processamento.

Neste estudo foi utilizado um material regido pelo critério de cedência de von Mises, para uma tensão de corte, $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$. Ao escolher este tipo de material, o programa assume que estamos num caso de EPT. Para efeitos de comparação, serão apresentados dois estudos diferentes, um utilizando malhas triangulares de três nós e outro utilizando malhas triangulares de seis nós. A nomenclatura utilizada nos estudos anteriores será também aplicada neste caso, no que diz respeito a malhas triangulares de três nós, T3, e malhas triangulares de seis nós, T6.

3.1.2.1 Malhas triangulares de três nós

Como foi referido anteriormente, utilizaram-se seis malhas não estruturadas diferentes. O refinamento foi feito de forma uniforme, não havendo discretizações em zonas particulares da estrutura. Como estamos perante um caso de EPT, não existe a ocorrência de fenómenos de locking. Como tal, para efeitos de comparação, as malhas utilizadas são as mesmas do estudo anterior, efectuado utilizando uma análise incremental no software *ANSYS*. As primeiras malhas analisadas podem ser observadas na Figura 3.3. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	P_u/σ_0	Solução exacta [8]	Erro (%)
1	T3	1966	2036	4	190.274	0.810		1.2
2	T3	12412	12586	25	189.085	0.805		0.6
3	T3	22136	22386	45	188.832	0.804	0.8	0.4
4	T3	49916	50264	120	188.489	0.802		0.3
5	T3	78148	78584	201	188.389	0.802		0.2
6	T3	102236	102734	292	188.441	0.802		0.2

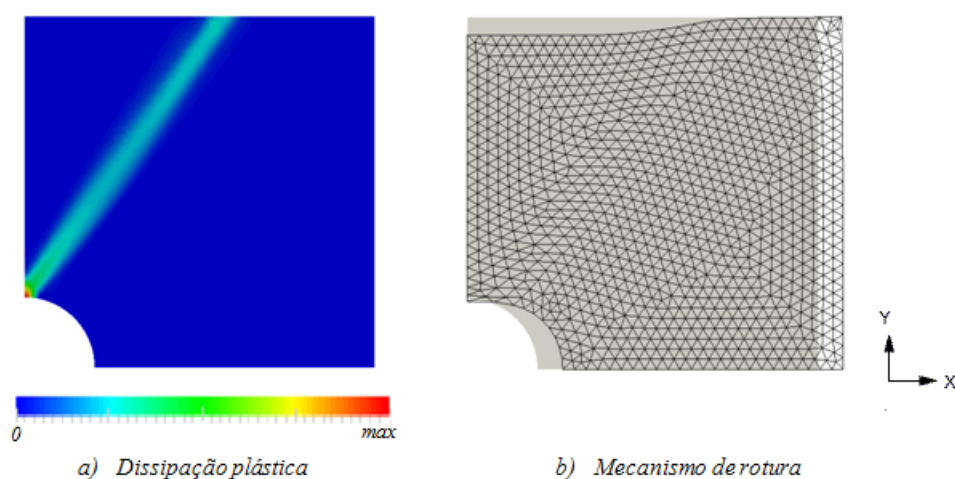


Figura 3.7: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

Por outro lado, assume-se interessante observar os melhores resultados referentes à dissipação plástica nos diferentes elementos. Neste sentido, pode ser consultado na Figura 3.7, a distribuição da dissipação plástica nos diversos elementos correspondentes à última malha estudada e o mecanismo de colapso da malha 1. Observe o leitor que a linha de dissipação formada corresponde à linha de rotura do mecanismo de colapso da solução exacta, desenvolvida por Gaydon e McCrum [6], que forma um ângulo de aproximadamente 35.26° com a vertical.

3.1.2.2 Malhas triangulares de seis nós

Foram objecto de estudo seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós. Tal como anteriormente, o refinamento foi feito de forma uniforme, não se discretizando em zonas particulares da placa. As diferentes malhas utilizadas são as mesmas referentes à análise elasto-plástica incremental no software *ANSYS*, para elementos de seis nós, podendo estas serem visualizadas na Figura 3.4. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	P_u/σ_0	Solução exacta [8]	Erro (%)
1	T6	494	2048	2	190.501	0.811		1.3
2	T6	3094	12522	15	189.752	0.807		0.9
3	T6	5490	22192	33	189.640	0.807	0.8	0.9
4	T6	12412	49996	83	189.229	0.805		0.7
5	T6	19436	78180	151	189.211	0.805		0.6
6	T6	25516	102564	214	189.067	0.805		0.6

A dissipação plástica dos diversos elementos e o mecanismo de colapso, quando efectuada uma análise recorrendo a elementos T6, podem ser visualizados na Figura 3.8.

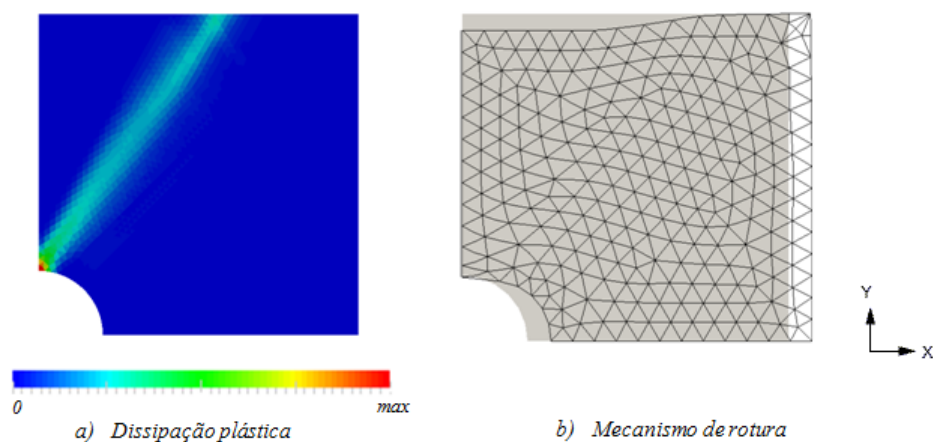


Figura 3.8: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6.

Como foi referido anteriormente, o processo iterativo na determinação da carga de colapso é controlado através de um parâmetro de penalidade r_0 , em que não existe matematicamente um valor exacto para este. Para estudar a influência deste parâmetro nos resultados obtidos, efectuou-se, para as mesmas malhas, um novo cálculo da carga de colapso da placa, em que a solução obtida corresponde à melhor aproximação que é possível obter utilizando este software.

3.1.2.3 Malhas triangulares de três nós melhoradas

Neste estudo procurou-se que o valor do parâmetro r_0 ou penalidade, se mantivesse constante ao longo de todas as iterações, querendo com isto dizer que se irá procurar a melhor solução que este software pode fornecer, no que diz respeito à aproximação da carga de colapso da placa. Contudo, espera-se obter piores resultados em termos de eficiência. As malhas utilizadas são as apresentadas na Figura 3.3, quando utilizados elementos T3 e os resultados obtidos podem ser consultados na Tabela 3.5.

A dissipação plástica dos diversos elementos e o mecanismo de colapso, quando efectuada uma análise da influência do parâmetro r_0 , podem ser visualizados na Figura 3.9.

Tabela 3.5: Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* através da alteração do parâmetro utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/σ_0	Solução exacta [8]	Erro (%)
1	T3	1966	2036	19	189.462	0.806	0.8	0.8
2	T3	12412	12586	116	188.611	0.803		0.3
3	T3	22136	22386	212	188.422	0.802		0.2
4	T3	49916	50264	521	188.249	0.801		0.1
5	T3	78148	78584	883	188.145	0.801		0.1
6	T3	102236	102734	1177	188.104	0.800		0.1

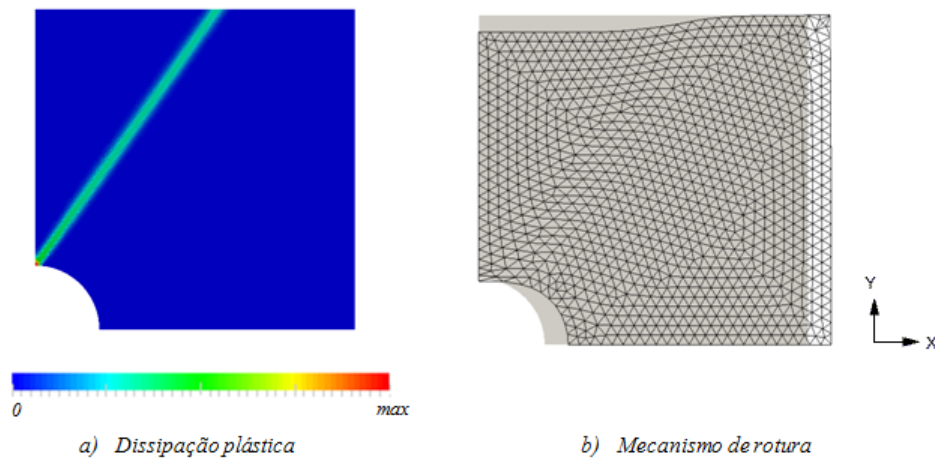


Figura 3.9: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

3.1.2.4 Malhas triangulares de seis nós melhoradas

Seguindo as mesmas bases do estudo anterior, efectuou-se uma análise semelhante mas agora utilizando malhas T6. As malhas utilizadas são as apresentadas na Figura 3.4, quando utilizados este tipo de elementos, e os resultados obtidos podem ser consultados na Tabela 3.6.

Chama-se a atenção do leitor para o facto de se ter obtido um pequeno erro, no que diz respeito à análise limite com malhas T6, nomeadamente nas duas últimas malhas estudadas, obtendo-se resultados abaixo da solução exacta, algo à partida nada esperado pois tratam-se de estimativas estritas da região superior. Aponta-se

Tabela 3.6: Resumo das análises para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* através da alteração do parâmetro utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/ σ_0	Solução exacta [8]	Erro (%)
1	T6	494	2048	16	189.259	0.805		0.7
2	T6	3094	12522	82	188.285	0.801		0.2
3	T6	5490	22192	151	188.161	0.801		0.1
4	T6	12412	49996	383	188.028	0.800	0.8	0.0
5	T6	19436	78180	661	187.969	0.800		0.0
6	T6	25516	102564	934	187.954	0.800		0.0

como principal razão o facto de o algoritmo do *SUBLIM3d* ter terminado a análise desta solução para a tolerância atribuída, obtendo-se assim este pequeno erro.

Tal como no estudo anterior, a dissipação plástica dos diversos elementos e a deformada da placa, quando efectuada uma análise da influência do parâmetro r_0 , podem ser visualizadas na Figura 3.10.

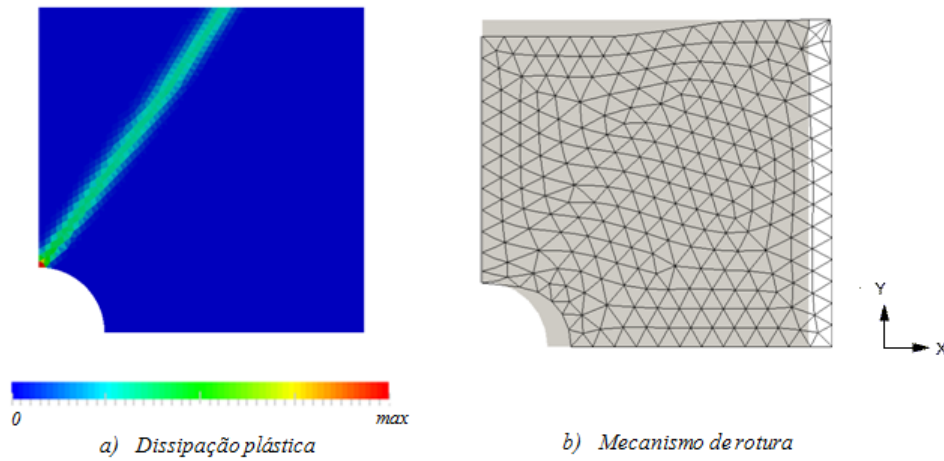


Figura 3.10: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da placa com furo circular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6.

3.2 Viga em consola (EPT)

Este segundo estudo diz respeito à determinação da carga última de uma viga em consola, sujeita a uma carga distribuída de corte na sua extremidade, como se pode verificar na Figura 3.11. Alguns autores estudaram a sua solução, apresentando estimativas da carga de colapso através da aplicação numérica do teorema estático e teorema cinemático da análise limite [11]. Contudo, a sua solução exacta não é conhecida. É importante referir que se está perante um caso de estado plano de tensão (EPT), dado que a espessura da viga é bastante diminuta comparativamente com as outras duas dimensões.

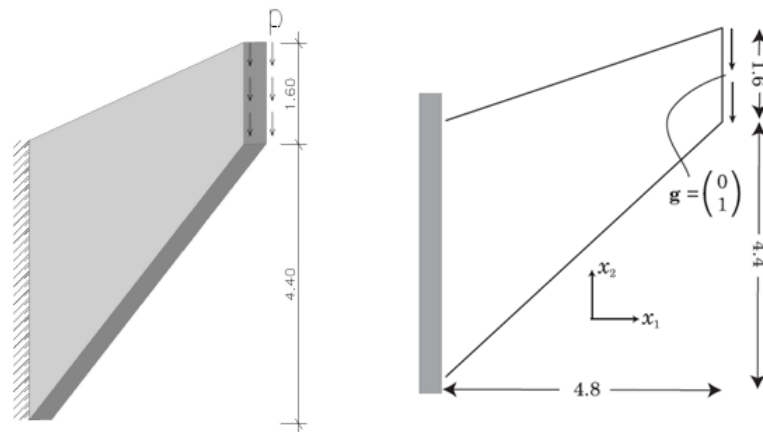


Figura 3.11: Viga em consola sujeita a um carregamento de corte na sua extremidade (adaptado de [11])

3.2.1 Modelação em ANSYS

Neste problema, o tipo de elementos utilizados na discretização da viga foi o mesmo anteriormente utilizado nos estudos anteriores, nomeadamente elementos planos *Plane42* e *Plane82*, para malhas triangulares de três e seis nós, respectivamente. Estes elementos apenas possuem dois graus de liberdade por nó, neste caso os deslocamentos segundo as duas direcções do plano (x,y).

O material utilizado neste problema é um material isotrópico e segue o critério de cedência de von Mises. Tratando-se de uma análise perfeitamente plástica, considerou-se que a viga era de betão com um regime elástico linear caracterizado por um módulo de elasticidade, E , de 30 GPa e coeficiente de Poisson, ν , igual a 0,2. No que

diz respeito à capacidade plástica do material, considerou-se uma tensão de cedência, $\sigma_0 = 30$ MPa. Para garantir que o critério de cedência de von Mises era aplicado, o material escolhido no *ANSYS* foi o regulado pelo critério de Drucker-Prager, com particular atenção ao facto de garantir que o ângulo de atrito seja nulo, $\phi = 0$. Tal como foi feito no problema anterior, considerou-se que o ângulo de dilatação, ψ , era também nulo, conseguindo com isto aplicar o princípio da normalidade.

Como se trata de uma análise elasto-plástica incremental e seguindo a mesma linha do problema da placa com furo, anteriormente estudado, especificou-se que o primeiro carregamento a aplicar na viga seria 1/20 da carga total e os restantes incrementos seriam feitos de forma automática, consoante a resposta do material ao último carregamento aplicado.

Como foi referido anteriormente, a escolha do valor de carga a aplicar é algo importante, pois por um lado é necessário aplicar uma carga de valor suficientemente grande, que cause garantidamente o colapso e por outro valores demasiadamente grandes conduzem a uma imprecisão do resultado final. Neste caso a solução exacta não é conhecida. Contudo após realizar uma análise consegue-se perceber a ordem de grandeza da carga de colapso da viga, aplicando-se uma carga relativamente próxima deste valor. Outro aspecto importante diz respeito ao modo de aplicação da carga. O software *ANSYS* não possui um método directo de aplicação de uma carga distribuída de corte ao longo de uma linha. Como tal, reduziu-se a carga distribuída a cargas pontuais nos nós das diferentes malhas, tendo em conta a área de influência de cada um.

Note-se também que este tipo de análise é efectuada considerando o princípio dos pequenos deslocamentos. O resultado obtido desta análise é o coeficiente multiplicador da carga de colapso, λ , que não é mais do que o valor, que multiplicado pela carga aplicada, corresponde à parcela do carregamento que causou a rotura da viga. O resultado obtido para a carga de colapso, P_u , é apresentado nas tabelas para os diferentes estudos efectuados, tanto na sua forma dimensional como na sua forma adimensional.

Como se trata de um problema de estado plano de tensão não ocorreram problemas relacionados com fenómenos de locking, tal como seria de esperar.

3.2.1.1 Malhas triangulares de três nós

As diferentes malhas estudadas podem ser visualizadas na Figura 3.12. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.7.

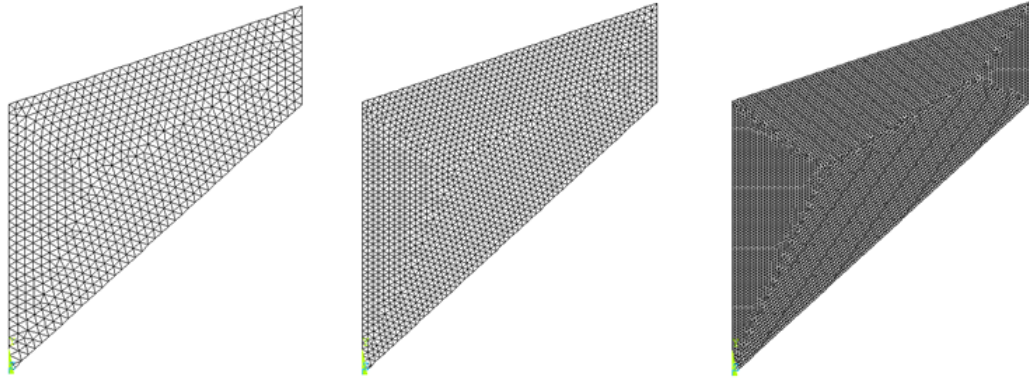


Figura 3.12: Discretização da viga em consola no software *ANSYS* utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.7: Resumo das análises para o problema da viga em consola no software *ANSYS* utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/ τ
1	T3	1441	1500	14	12.000	0.693
2	T3	3269	3358	25	11.885	0.686
3	T3	13203	13380	81	11.885	0.686
4	T3	27014	27266	153	11.885	0.686
5	T3	52992	53344	360	11.885	0.686
6	T3	82849	83288	1980	11.885	0.686

3.2.1.2 Malhas triangulares de seis nós

Utilizaram-se seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós, sendo seu refinamento feito de forma uniforme e progressiva em toda a estrutura. As diferentes malhas usadas podem ser visualizadas na Figura 3.13. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.8.

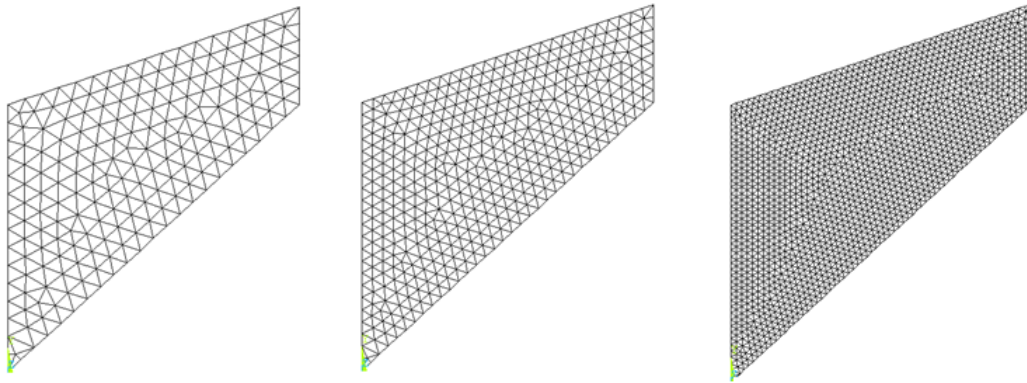


Figura 3.13: Discretização da viga em consola no software *ANSYS* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.8: Resumo das análises para o problema da viga em consola no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/ τ
1	T6	348	1452	8	12.000	0.693
2	T6	805	3310	12	11.885	0.686
3	T6	3265	13254	42	11.885	0.686
4	T6	6721	27138	89	11.885	0.686
5	T6	13203	53166	197	11.885	0.686
6	T6	20636	82984	343	11.885	0.686

Apresenta-se então os resultados obtidos referentes à deformada e campo de tensões na viga, para a melhor malha de elementos T6, analisada no software *ANSYS*. Estes podem ser observados na Figura 3.14 e 3.15, no que diz respeito à deformada e campo de tensões na viga, respectivamente.

Informa-se o leitor que os resultados apresentados correspondem à situação no instante do colapso. Contudo, como se trata de uma análise elasto-plástica incremental, o campo de tensões e a deformada da viga podem ser consultados para qualquer outro instante de carregamento antes do colapso.

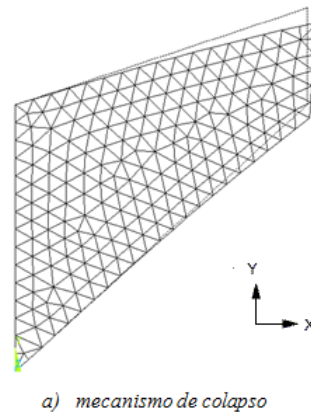


Figura 3.14: Mecanismo de colapso para o problema da viga em consola no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

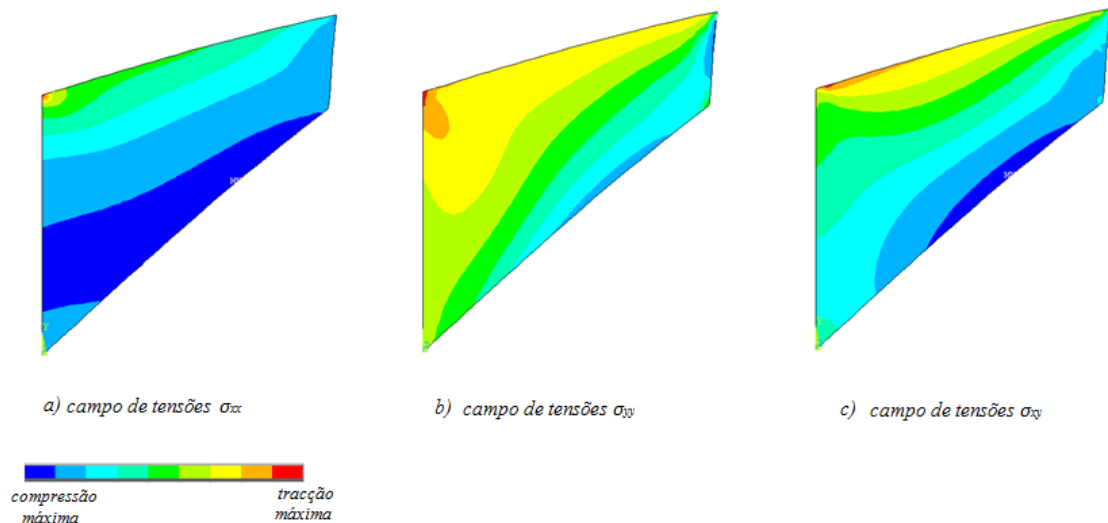


Figura 3.15: Campo de tensões para o problema da viga em consola no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

3.2.2 Modelação em *SUBLIM3d*

Tal como foi referido anteriormente, a geometria e a malha de elementos finitos são criadas no software *ANSYS*, ou seja, o *SUBLIM3d* funciona apenas como um código de cálculo, não tendo um modo de pré-processamento para a modelação geométrica.

Neste estudo foi utilizado um material regido pelo critério de cedência de von Mises, para uma tensão de corte, $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$. Ao escolher este tipo de material, o programa assume que estamos num caso de EPT. Para efeitos de comparação, serão apresentados dois estudos diferentes, um utilizando malhas triangulares de três nós e outro utilizando malhas triangulares de seis nós. A nomenclatura utilizada nos estudos anteriores será também aplicada neste caso, no que diz respeito a malhas triangulares de três nós, T3, e malhas triangulares de seis nós, T6.

3.2.2.1 Malhas triangulares de três nós

Utilizaram-se seis malhas não estruturadas. Estas correspondem às malhas analisadas na secção anterior, quando feita uma análise elasto-plástica incremental no software *ANSYS*, podendo ser visualizadas na Figura 3.12. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Resumo das análises para o problema da viga em consola no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/ τ
1	T3	1441	1500	1	11.876	0.68571
2	T3	3269	3358	1	11.865	0.68507
3	T3	13203	13380	5	11.866	0.68510
4	T3	27014	27266	11	11.859	0.68472
5	T3	52992	53344	22	11.858	0.68465
6	T3	82849	83288	39	11.857	0.68461

3.2.2.2 Malhas triangulares de seis nós

Utilizaram-se seis malhas não estruturadas diferentes, sendo o seu refinamento feito de forma uniforme, não havendo discretizações em zonas particulares da estrutura. As diferentes malhas usadas podem ser visualizadas na Figura 3.13. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Resumo das análises para o problema da viga em consola no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	P _u (MPa)	P _u /τ
1	T6	348	1452	1	11.925	0.68849
2	T6	805	3310	1	11.888	0.68640
3	T6	3265	13254	4	11.868	0.68520
4	T6	6721	27138	8	11.858	0.68465
5	T6	13203	53166	19	11.861	0.68479
6	T6	20636	82984	36	11.859	0.68472

Por outro lado, assume-se interessante observar os melhores resultados referentes à dissipação plástica nos diferentes elementos. Neste sentido, pode ser consultado na Figura 3.16, a distribuição da dissipação plástica nos diversos elementos correspondentes à última malha estudada e o mecanismo de colapso da viga em consola.

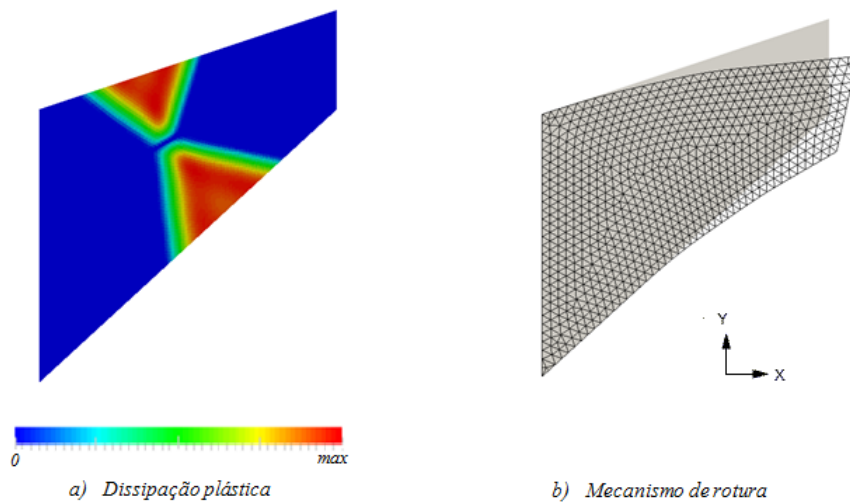


Figura 3.16: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da viga em consola no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

3.3 Capacidade de carga de fundações superficiais (EPD)

Este terceiro estudo trata sobre uma sapata rectangular flexível de comprimento infinito, sujeita a uma carga uniformemente distribuída na vertical, como se pode verificar na Figura 3.17. Este tipo de problemas apresenta um apreciável grau de dificuldade na obtenção da sua solução analítica, pois os mecanismos de colapso são complexos. Em primeiro lugar referir que, tratando-se de uma fundação de comprimento infinito, está-se perante um caso típico de estado plano de deformação (EPD).

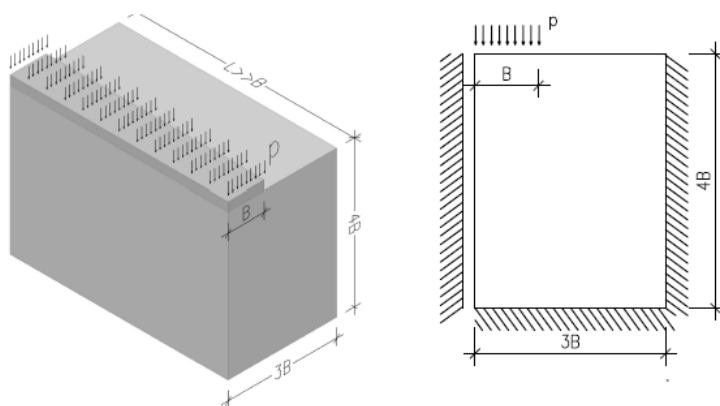


Figura 3.17: Sapata rectangular

Desde os primeiros trabalhos efectuados sobre este assunto, nomeadamente Terzaghi [21], entre outros, é usual exprimir a capacidade de carga de uma fundação, sujeita a um carregamento vertical e centrado, em condições drenadas, através da seguinte expressão:

$$q_r = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + q' N_q + c' N_c \quad (3.1)$$

Antes de se explicar o significado de cada uma das grandezas, pede-se a atenção do leitor para o facto de a expressão apresentada estar decomposta em duas parcelas distintas, em que se considera nulo o efeito de interacção entre estas. Esta hipótese que tem em conta a sobreposição de efeitos, é de facto uma aproximação inexacta da realidade, especialmente tendo em conta a não linearidade do problema em causa. Contudo, este é um processo válido na medida em que apresenta resultados satisfatórios e do lado da segurança, sendo um método tradicional no cálculo

de estruturas deste tipo, podendo esta expressão ser consultada no EC7 [5]. Na expressão (3.1), B é a largura da menor dimensão da sapata e q' é a sobrecarga superficial uniformemente distribuída, que simula a acção do peso próprio do solo acima do nível da cota de fundação; c' é a coesão efectiva do solo; γ representa o peso próprio do material de fundação; N_q , N_γ e N_c , são os coeficientes de capacidade de carga associados às diferentes parcelas, respectivamente, o termo de profundidade, o termo associado ao comportamento atrítico do solo devido à acção do seu peso próprio e o termo coesivo.

Quando uma fundação é sujeita ao mesmo tipo de carregamento, mas em condições não drenadas, a capacidade de carga de uma fundação, toma a seguinte forma:

$$q_r = N_c c_u + q' \quad (3.2)$$

sendo, c_u a resistência ao corte não drenada do solo.

Tratando-se de um solo muito leve, a parcela de solo à profundidade do plano de fundação, q' , pode ser desprezada, pois esta não influencia na capacidade de carga da fundação. Isto significa que, a solução exacta deste caso particular é possível de obter. Tal foi apresentado por Prandtl em 1920 e mais tarde por Meyerhof [16], em 1951, através da seguinte expressão:

$$N_c = (2 + \Pi) \quad (3.3)$$

Pode-se então concluir que a carga última resistente às acções verticais, estando perante as condições particulares apresentadas anteriormente, depende exclusivamente da resistência ao corte do solo. Devido às propriedades de simetria geométricas e de carregamento, apenas foi modelada metade da sapata.

3.3.1 Modelação em ANSYS

Neste terceiro estudo, utilizando o software *ANSYS*, existiram diversos aspectos preponderantes na sua modelação. Em primeiro lugar, refere-se que está-se perante um caso de estado plano de deformação (EPD). Outro aspecto importante foi a escolha do tipo de elementos a utilizar na discretização do problema. Garantiu-se que

estes elementos tinham um comportamento de estado plano de deformação (EPD) e que tinham um comportamento plástico, pois por pré-definição do software estes têm um comportamento de EPT. Interessava também definir como graus de liberdade os deslocamentos segundo as direcções do plano (x,y). Como tal, os elementos utilizados na discretização do problema são os mesmos utilizados na discretização do estudo anterior da placa com furo, ou seja, elementos planos *Plane82* (ver Figura 3.2), para malhas triangulares de seis nós.

Em estados planos de deformação, o critério de Tresca coincide com o critério de cedência de von Mises. Assim, o material utilizado neste problema é um material isotrópico e segue o critério de cedência de von Mises. Para a definição deste tipo de material foi necessário fornecer determinadas características. Tratando-se de um material elasto-plástico, considerou-se que se tratava de um solo com um patamar elástico linear caracterizado por um módulo de elasticidade, E , de 30 GPa e coeficiente de Poisson, ν , igual a 0.2. Note o leitor que as características elásticas escolhidas para o material em nada se assemelham aos valores reais de um solo. Contudo, a grande rigidez atribuída para as deformações elásticas em nada afecta o resultado final da carga de colapso. No que diz respeito à capacidade plástica do material, considerou-se um comportamento não drenado do solo, com uma coesão, c , igual a 15 MPa. Para garantir que o critério de cedência de von Mises era aplicado, o material escolhido no *ANSYS* foi o regulado pelo critério de Drucker-Prager, com particular atenção ao facto de garantir que o ângulo de atrito, ϕ , tome o valor zero. Tal como foi feito no problema estudado anteriormente, considerou-se que o ângulo de dilatação, ψ , era também nulo, conseguindo com isto aplicar o princípio da normalidade.

Tal como foi referido no estudo anterior, este software faz automaticamente o incremento de carga consoante a resposta do material ao último carregamento efectuado, necessitando-se apenas de definir um ponto de partida, ou seja, a primeira parcela de carga a ser aplicada. Definiu-se, que o primeiro carregamento seria 1/20 da carga total, sendo os restantes incrementos feitos de forma automática.

Como foi referido anteriormente, a escolha do valor de carga a aplicar é algo importante, pois por um lado é necessário aplicar uma carga de valor suficientemente grande, que cause garantidamente o colapso e por outro valores demasiadamente grandes conduzem a uma imprecisão do resultado final. Neste caso como a solução exacta é conhecida, aplicou-se uma carga relativamente próxima deste valor. Note-se

também que este tipo de análise é efectuada considerando o princípio dos pequenos deslocamentos.

Antes de iniciar este estudo, informa-se que a análise elasto-plástica incremental apenas foi efectuada para malhas de elementos triangulares de seis nós. Isto deve-se ao facto de ocorrerem problemas de locking quando utilizadas malhas de elementos triangulares de apenas três nós. Este tipo de problemas estão relacionados com a redução dos graus de liberdade efectivos da malha, quando introduzida uma restrição acrescida devido à condição de normalidade, em casos de comportamento em deformação plana. Resultante deste fenómeno são soluções que apresentam uma perda significativa de qualidade, devido à excessiva rigidez dos elementos da malha. No caso de estados de tensão plana tal não acontece, pois ε_{33} pode ser diferente de zero, conseguindo com isto um ganho de mais um grau de liberdade efectivo na malha. O resultado obtido para a carga de colapso, P_u , é apresentado nas tabelas para os diferentes estudos efectuados, tanto na sua forma dimensional como na sua forma adimensional.

3.3.1.1 Malhas triangulares de seis nós

No estudo deste problema foram analisadas seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós. As primeiras três malhas estudadas podem ser visualizadas na Figura 3.18. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.11.

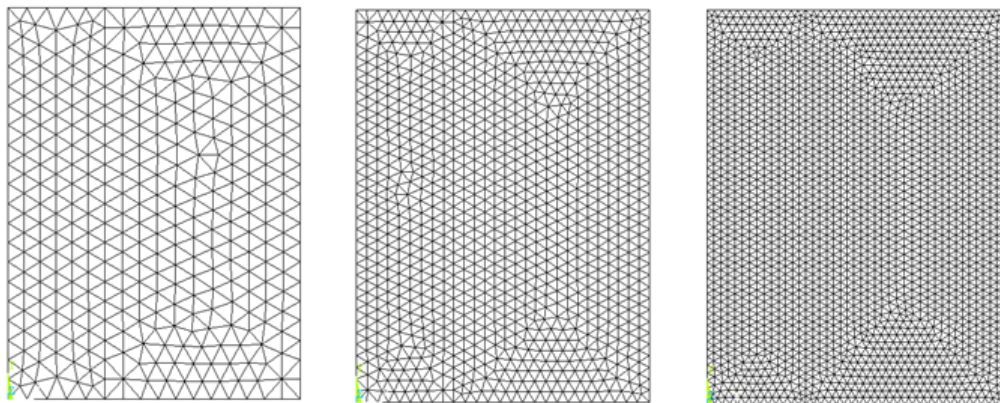


Figura 3.18: Discretização da sapata rectangular no software *ANSYS* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.11: Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c	Solução exacta [16]	Erro (%)
1	T6	676	2664	11	77.874	5.192	2+II	1.0
2	T6	1880	7452	26	77.625	5.175		0.6
3	T6	4224	16796	61	77.701	5.180		0.7
4	T6	17142	68368	253	77.353	5.157		0.3
5	T6	26918	107422	432	77.353	5.157		0.3
6	T6	30534	121868	485	77.353	5.157		0.3

3.3.2 Modelação em *Plaxis*

Continuando com uma análise incremental, procurou-se determinar a carga de colapso deste problema, mas desta vez utilizando o software *Plaxis*. Note o leitor que esta é a primeira análise utilizando este software, pois trata-se de um programa de cálculo automático direccionado especialmente para problemas geotécnicos, ou seja, problemas que são normalmente analisados segundo um comportamento de estado plano de deformação. Como tal, este software não permite analisar problemas com comportamento de EPT.

Não entrando em grandes detalhes de como foi feita a modelação geométrica, refere-se que, tal como no software *ANSYS*, apenas se modelou metade da sapata por questões de simetria das suas propriedades geométricas e de carregamento. Outro aspecto importante foi a escolha dos elementos a utilizar na discretização do problema. Este software apenas permite a utilização de elementos triangulares de seis nós e de quinze nós. Percebe-se perfeitamente este facto, pois em EPD, elementos triangulares de três nós não fornecem resultados precisos devido a problemas de locking, como já foi referido anteriormente. Neste estudo serão apresentadas seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós e seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de quinze nós. Para melhor percepção e facilidade de leitura, as malhas triangulares de seis nós serão apresentadas pelas siglas T6 e as malhas triangulares de quinze nós pelas siglas T15.

A escolha do material foi um aspecto muito importante, no sentido de se garantir uma análise elasto-plástica deste problema. Assim, considerou-se um solo com um

patamar elástico linear caracterizado por um módulo de elasticidade, E , de 30 GPa e coeficiente de Poisson, ν , igual a 0,2. No que diz respeito à capacidade plástica do material, considerou-se um comportamento não drenado do solo, com uma coesão, c , igual a 15 MPa. Quanto ao critério de cedência a aplicar neste tipo de análises, este software tem pré-definido o critério de Mohr-Coulomb. Garantindo que o valor do ângulo de atrito do solo é nulo, está-se no fundo a utilizar o critério de cedência de Tresca, onde graficamente a superfície de cedência deixa de ser uma pirâmide hexagonal, tomando a forma de um prisma de igual base. Considerou-se que o ângulo de dilatação, ψ , era também nulo, conseguindo com isto aplicar o princípio da normalidade. Deu-se também atenção ao facto de se efectuar uma análise admitindo como válida a hipótese dos pequenos deslocamentos.

No que diz respeito aos parâmetros incrementais da carga, este software possui um algoritmo automático de incremento de carga, que garante a melhor solução para o problema. A sua escolha é feita desenvolvendo uma análise de teste para saber qual o melhor incremento para o problema em causa. Refere-se mais uma vez que este processo é automático e é desenvolvido durante o cálculo da carga última. Neste estudo, dividiu-se este problema em duas fases, uma primeira aplicando uma carga distribuída unitária e uma segunda que levasse a estrutura ao colapso. Nesta última fase definiu-se um valor total, suficientemente grande, para o carregamento, que multiplicado pela carga unitária inicialmente aplicada garantisse o colapso da estrutura.

Antes de se apresentarem os resultados obtidos através das diferentes malhas, é importante referir a dificuldade em conseguir igualar o número de graus de liberdade entre as malhas T6 e T15. Este facto prende-se pela inexistência de uma opção que defina o espaçamento da malha. O aumento do grau de discretização do problema é feito de forma automática pelo programa, tendo-se assim dificuldade em definir o espaçamento da malha e, consequentemente o número de graus de liberdade.

3.3.2.1 Malhas triangulares de seis nós

Como referido anteriormente, foram objecto de estudo seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós. Estas podem ser observadas na Figura 3.19 para melhor percepção do leitor e os respectivos resultados são apresentados na Tabela 3.12.

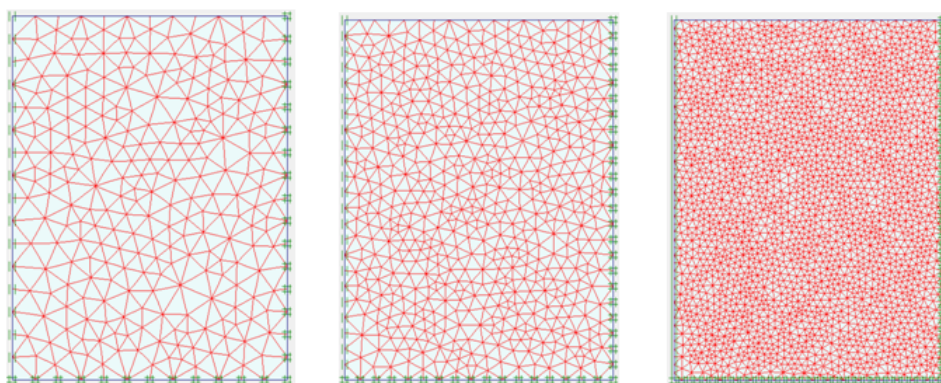


Figura 3.19: Discretização da sapata rectangular no software *Plaxis* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.12: Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software *Plaxis* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c	Solução exacta [16]	Erro (%)
1	T6	526	3183	13	77.550	5.170	2+II	0.6
2	T6	2337	14089	41	77.380	5.159		0.3
3	T6	5032	30283	110	77.280	5.152		0.2
4	T6	16180	97225	580	77.220	5.148		0.1
5	T6	22196	133321	890	77.230	5.149		0.1
6	T6	32060	192573	1465	77.190	5.146		0.1

3.3.2.2 Malhas triangulares de quinze nós

Neste estudo, efectuou-se uma análise de cinco malhas não estruturadas T15. Como foi referido anteriormente, não foi possível efectuar o estudo da última malha devido à insuficiência de memória da máquina para desenvolver tal análise. Os resultados obtidos podem ser consultados na Tabela 3.13 e as respectivas malhas são apresentadas na Figura 3.20.

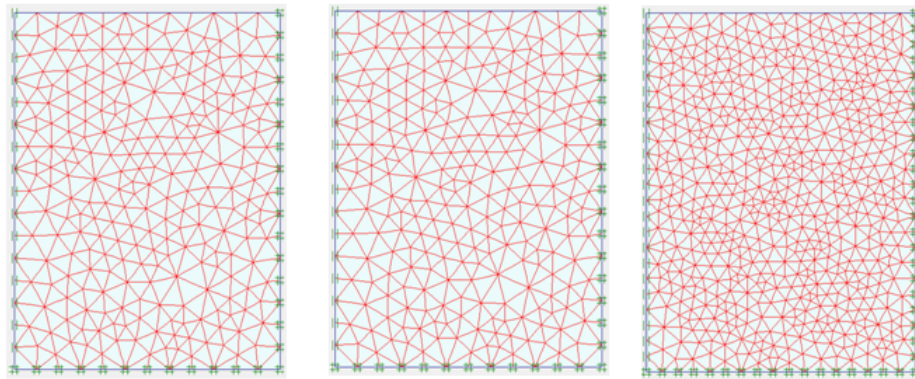


Figura 3.20: Discretização da sapata rectangular no software *Plaxis* utilizando elementos T15, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.13: Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software *Plaxis* utilizando elementos T15.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	P _u (MPa)	P _u /c	Solução exacta [16]	Erro (%)
1	T15	288	4405	38	77.200	5.147	2+II	0.1
2	T15	526	8025	55	77.280	5.152		0.2
3	T15	1227	18597	167	77.250	5.150		0.2
4	T15	2337	35421	391	77.250	5.150		0.2
5	T15	5032	75865	1076	77.150	5.143		0.0
6	T15	9978	150150	2195	77.180	5.145		0.1

Apresenta-se agora os melhores resultados obtidos na análise elasto-plástica incremental, utilizando malhas T15 no software *Plaxis*, nomeadamente para a malha 5, no que diz respeito à deformada e campo de tensões da sapata, no instante de colapso, podendo ser consultados na Figura 3.21 e 3.22, respectivamente.

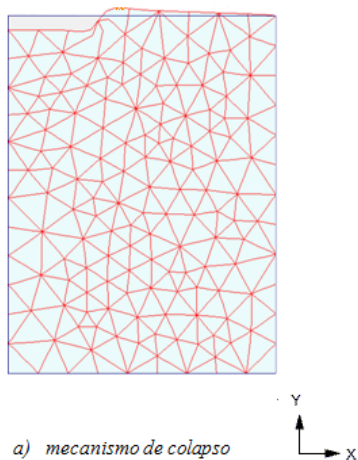


Figura 3.21: Mecanismo de colapso para o problema da sapata rectangular no software *Plaxis* utilizando elementos T15.

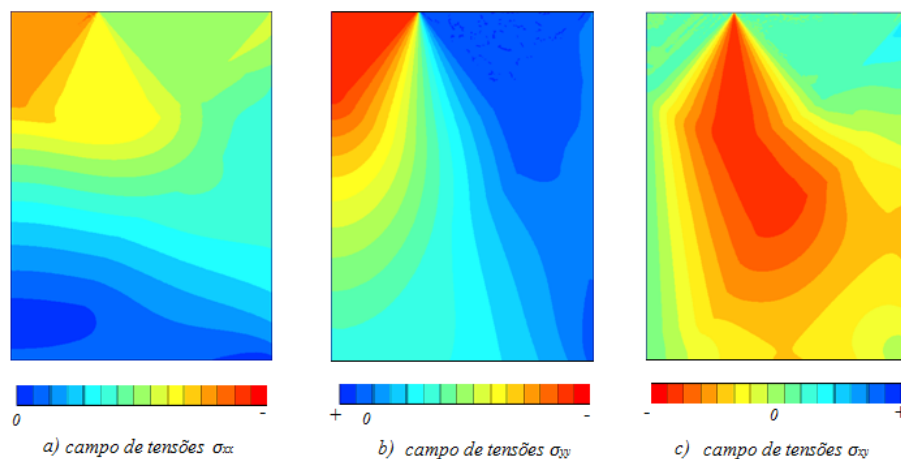


Figura 3.22: Campo de tensões para o problema da sapata rectangular no software *Plaxis* utilizando elementos T15.

3.3.3 Modelação em *SUBLIM3d*

Ao contrário do que foi feito no estudo anterior, neste problema não se irá analisar a influência do parâmetro r_0 , na qualidade da aproximação da carga de colapso e no respectivo tempo de processamento. Deixa-se esse problema para futuros estudos, centrando-nos agora na determinação de cargas de colapso e na sua eficiência.

Neste estudo foi utilizado um material regido pelo critério de cedência de Tresca, para uma coesão, $c = \sigma_0/2$. Ao escolher este tipo de material, o programa assume

que estamos perante um caso de EPD. Para efeitos de comparação, serão apresentados dois estudos diferentes, um utilizando malhas triangulares de três nós e outro utilizando malhas triangulares de seis nós. Note o leitor que neste estudo serão utilizadas malhas triangulares de três nós, que como foi referido anteriormente suscitam problemas relacionados com fenómenos de locking. Para combater tais efeitos, serão utilizadas malhas estruturadas deste tipo de elementos, ao contrário das malhas não estruturadas até aqui utilizadas.

Assim, a nomenclatura utilizada neste estudo difere um pouco da utilizada em estudos anteriores. No que diz respeito a malhas triangulares de três nós, T3, esta permanecerá a mesma. Relativamente a malhas triangulares de seis nós, serão feitos dois estudos utilizando malhas estruturadas e não estruturadas, sendo as siglas T6-E e T6-NE representativas destas malhas, respectivamente.

3.3.3.1 Malhas triangulares de três nós

Utilizaram-se seis malhas estruturadas diferentes. As diferentes malhas usadas podem ser visualizadas na Figura 3.23. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.14.

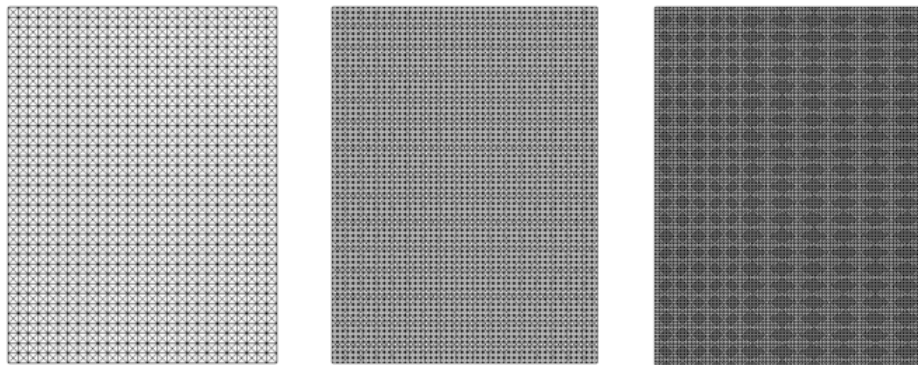


Figura 3.23: Discretização da sapata rectangular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.14: Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c	Solução exacta [16]	Erro (%)
1	T3	2668	2639	4	79.920	5.328	2+II	3.6
2	T3	7800	7750	14	79.332	5.289		2.9
3	T3	17100	17025	30	78.975	5.265		2.4
4	T3	65712	65564	132	78.223	5.215		1.4
5	T3	105468	105281	228	78.096	5.206		1.3
6	T3	117412	117215	260	78.057	5.204		1.2

3.3.3.2 Malhas triangulares de seis nós (T6-E)

Como foi referido atrás, utilizaram-se seis malhas estruturadas de elementos triangulares de seis nós. Informa-se o leitor que, com o progressivo aumento do refinamento das malhas, verificou-se um aumento do erro relativo referente à carga de colapso da sapata. Este aspecto será mais à frente analisado neste trabalho. Contudo, refere-se que esta diminuição está relacionada com o menor número de graus de liberdade efectivos na malha, relacionados com o facto de se estar a efectuar uma análise em EPD. Para combater este aspecto, efectuou-se uma alteração do parâmetro r_0 ou penalidade, nas três últimas malhas, procurando que este se mantivesse constante ao longo de todas as iterações, obtendo-se assim uma melhor qualidade da aproximação.

As diferentes malhas usadas podem ser visualizadas na Figura 3.24). Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.15.

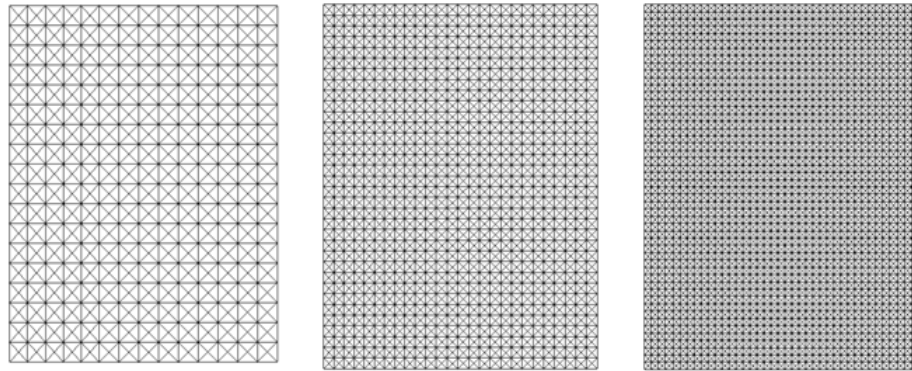


Figura 3.24: Discretização da sapata rectangular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.15: Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6-E.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c	Solução exacta [16]	Erro (%)
1	T6-E	720	2850	3	80.285	5.352	2+II	4.1
2	T6-E	2000	7950	6	79.304	5.287		2.8
3	T6-E	4408	17556	13	78.874	5.258		2.3
4	T6-E	16576	66156	149	77.303	5.154		0.2
5	T6-E	26696	106596	273	77.272	5.151		0.2
6	T6-E	30400	121400	351	77.269	5.151		0.2

3.3.3.3 Malhas triangulares de seis nós (T6-NE)

Por último será analisada a carga de colapso e respectivo tempo de cálculo, através do estudo de seis malhas não estruturas de elementos triangulares de seis nós. Estas malhas correspondem às analisadas anteriormente no software *ANSYS* e podem ser visualizadas na Figura 3.18. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.16.

Informa-se o leitor que, mais uma vez, com o progressivo aumento do refinamento das malhas, verificou-se um aumento do erro relativo referente à carga de colapso da sapata, logo a partir da malha inicial. Como tal, procedeu-se do mesmo modo do exemplo anterior, ou seja, alterando o parâmetro r_0 .

Tabela 3.16: Resumo das análises para o problema da sapata rectangular no software *ANSYS* utilizando elementos T6-NE.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c	Solução exacta [16]	Erro (%)
1	T6-NE	676	2664	3	78.110	5.207	2+II	1.3
2	T6-NE	1880	7452	12	77.747	5.183		0.8
3	T6-NE	4224	16796	34	77.558	5.171		0.6
4	T6-NE	17142	68368	164	77.349	5.157		0.3
5	T6-NE	26918	107422	283	77.298	5.153		0.2
6	T6-NE	30534	121868	336	77.286	5.152		0.2

Os resultados referentes à dissipação plástica dos elementos, utilizando malhas não estruturadas T6, podem ser observados na Figura 3.25, correspondentes à última malha estudada, bem como o mecanismo de colapso da sapata.

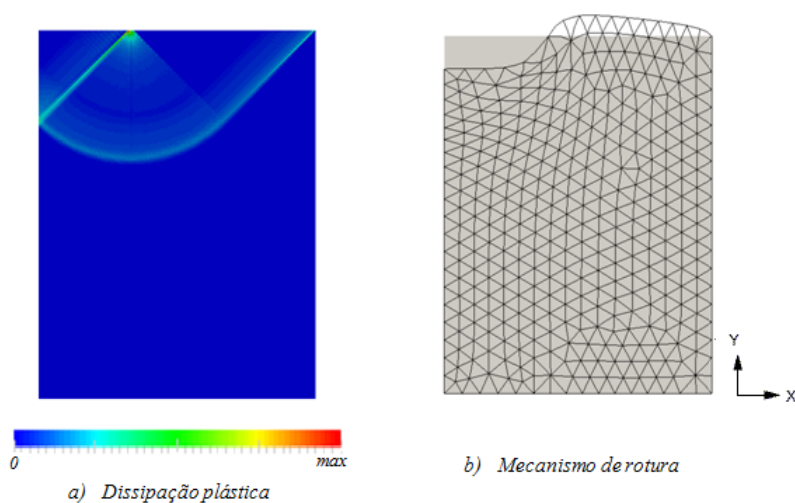


Figura 3.25: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema da sapata rectangular no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6-NE.

3.4 Bloco com entalhes (EPD)

Este último estudo diz respeito à determinação da carga última de um bloco com entalhes, sujeito a uma carga distribuída de tracção nas suas extremidades, como se pode verificar na Figura 3.26. Alguns autores estudaram a sua solução, apresentando estimativas da carga de colapso através da aplicação numérica do teorema estático e teorema cinemático da análise limite [11],[12],[14]. Contudo, a sua solução exacta não é conhecida. É importante referir que se está perante um caso de estado plano de deformação (EPD), dado que a altura do bloco é incomparavelmente maior que as suas outras duas dimensões, sendo portanto desprezáveis as deformações segundo essa direcção.

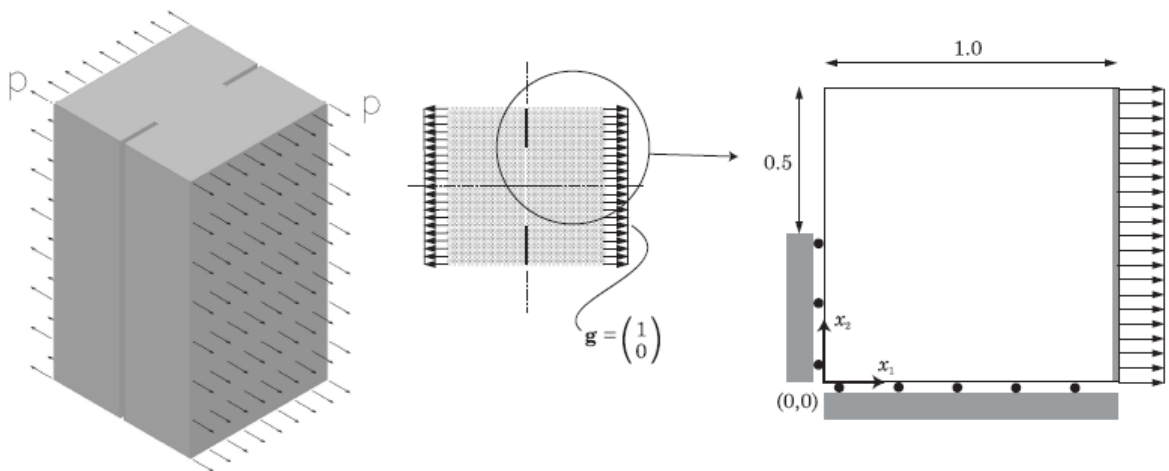


Figura 3.26: Bloco com entalhes (adaptado de [11])

3.4.1 Modelação em ANSYS

Tal como no exemplo anterior de estado plano de deformação, garantiu-se que estes elementos tinham o mesmo comportamento. Definiu-se como graus de liberdade os deslocamentos segundo as direcções do plano (x,y). Como tal, os elementos utilizados na discretização do problema são os mesmos utilizados na discretização do estudo anterior da sapata rectangular, ou seja, elementos planos *Plane82*, para malhas triangulares de seis nós.

O material utilizado neste problema é um material isotrópico e segue o critério de cedência de von Mises. Considerou-se que se tratava de um bloco de betão com um patamar elástico linear caracterizado por um módulo de elasticidade, E , de 30 GPa e coeficiente de Poisson, ν , igual a 0.2. A capacidade plástica do material é dada por uma tensão de cedência, $\sigma_0 = 30$ MPa. Para garantir que o critério de cedência de von Mises era aplicado, o material escolhido no *ANSYS* foi o regulado pelo critério de Drucker-Prager, com particular atenção ao facto de garantir que o ângulo de atrito, ϕ , tome o valor zero. Tal como foi feito no problema estudado anteriormente, considerou-se que o ângulo de dilatação, ψ , era também nulo, conseguindo com isto aplicar o princípio da normalidade.

Como se trata de uma análise elasto-plástica incremental e seguindo a mesma linha dos problemas anteriores, definiu-se que o primeiro carregamento a aplicar no bloco com entalhes seria 1/20 da carga total e os restantes incrementos seriam feitos de forma automática, consoante a resposta do material ao último carregamento aplicado. O resultado obtido para a carga de colapso, P_u , é apresentado nas tabelas para os diferentes estudos efectuados, tanto na sua forma dimensional como na sua forma adimensional.

Antes de iniciar este estudo, informa-se que a análise incremental apenas foi efectuada para malhas de elementos triangulares de seis nós, pois mais uma vez ocorreram problemas de locking quando utilizadas malhas de elementos triangulares de apenas três nós.

3.4.1.1 Malhas triangulares de seis nós

Utilizaram-se seis malhas não estruturadas diferentes, sendo o seu refinamento feito de forma uniforme, não havendo discretizações em zonas particulares da estrutura. As diferentes malhas usadas podem ser visualizadas na Figura 3.27. Contudo, apenas se apresentam as três primeiras malhas, sendo as seguintes uma evolução destas. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.17.

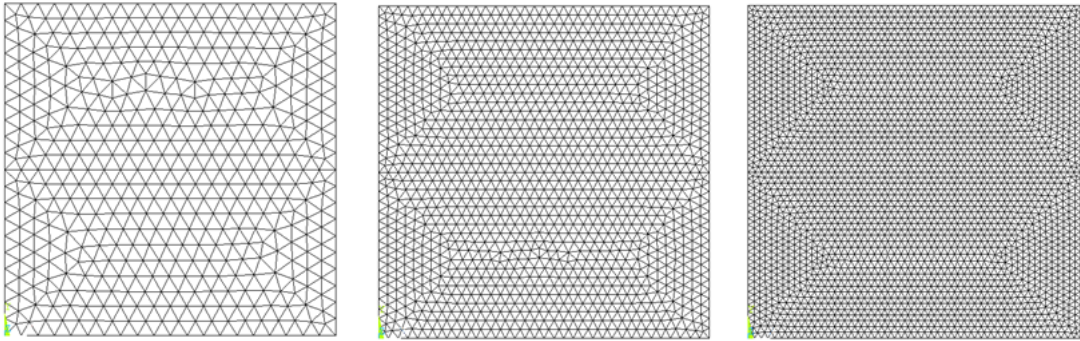


Figura 3.27: Discretização do bloco com entalhes no software *ANSYS* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.17: Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software *ANSYS* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c
1	T6	884	3636	13	17.700	1.180
2	T6	2552	10378	26	17.600	1.173
3	T6	5620	22730	51	17.235	1.149
4	T6	10162	40986	101	17.235	1.149
5	T6	22972	92388	279	17.200	1.147
6	T6	35866	144092	491	17.200	1.147

3.4.2 Modelação em *Plaxis*

Tal como foi referido anteriormente, no estudo da capacidade de carga às acções verticais de uma sapata rectangular, este software apenas analisa problemas que tenham um comportamento em estado plano de deformação. Como tal, será mais uma vez utilizado, mas agora na resolução deste problema do bloco com entalhes.

Tal como no software *ANSYS*, por questões de simetria geométrica e de carregamento, apenas se modelou metade da sapata. Outro aspecto importante foi a escolha dos elementos a utilizar na discretização do problema. Neste estudo serão apresentadas seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós e apenas cinco malhas não estruturadas de elementos triangulares de quinze nós, por insuficiência de memória da máquina.

Adoptou-se um patamar elástico linear caracterizado por um módulo de elasticidade, $E = 30$, GPa e coeficiente de Poisson, ν , igual a 0,2. No que fiz respeito à capacidade plástica do material, adoptou-se uma tensão de cedência, $\sigma_0 = 30$ MPa. Note o leitor que, mais uma vez, as propriedades elásticas escolhidas em nada vão influenciar o valor final da carga de colapso do bloco com entalhes. Garantiu-se que o valor do ângulo de atrito do solo é nulo, $\phi = 0$, logo está-se a utilizar o critério de cedência de Tresca, para uma coesão do material, $c = \sigma_0/2$ MPa. Considerou-se que o ângulo de dilatância, ψ , era também nulo, conseguindo com isto aplicar o princípio da normalidade. Deu-se também atenção ao facto de se efectuar uma análise que admitisse como válida a hipótese de pequenos deslocamentos.

Antes de se apresentarem os resultados obtidos através das diferentes malhas, é importante referir mais uma vez a dificuldade em conseguir igualar o número de graus de liberdade entre as malhas T6 e T15, pelo facto referido anteriormente.

3.4.2.1 Malhas triangulares de seis nós

Foram objecto de estudo seis malhas não estruturadas de elementos triangulares de seis nós. Estas podem ser observadas na Figura 3.28, onde apenas são apresentadas as primeiras três malhas, sendo as seguintes uma evolução destas. Para melhor percepção do leitor, os respectivos resultados são apresentados na Tabela 3.18.

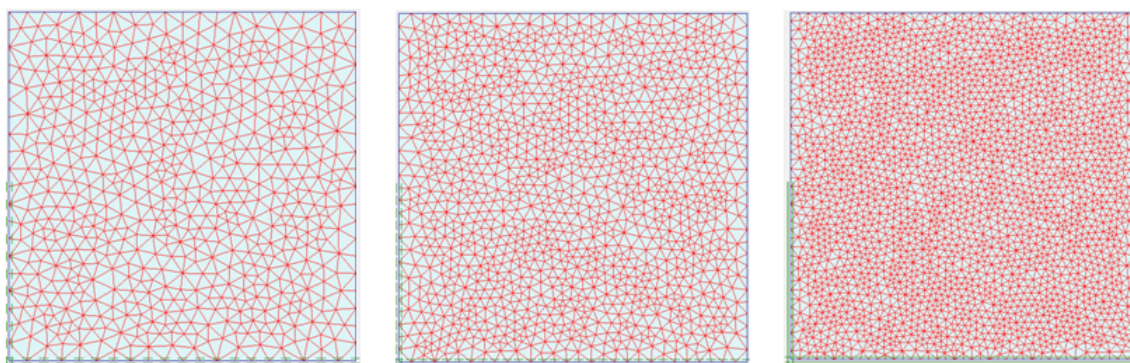


Figura 3.28: Discretização do bloco com entalhes no software *Plaxis* utilizando elementos T6, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.18: Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software *Plaxis* utilizando elementos T6.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c
1	T6	1238	5092	33	17.590	1.173
2	T6	2505	10187	43	17.350	1.157
3	T6	4950	20020	52	17.190	1.146
4	T6	10377	41853	70	17.040	1.136
5	T6	22653	91105	310	17.070	1.138
6	T6	36282	145763	894	17.070	1.138

3.4.2.2 Malhas triangulares de quinze nós

Neste estudo, efectuou-se uma análise de cinco malhas não estruturadas T15. Não foi possível efectuar o estudo da última malha por insuficiência de memória da máquina. Os resultados obtidos podem ser consultados na Tabela 3.19 e as respectivas malhas são apresentadas na Figura 3.29.

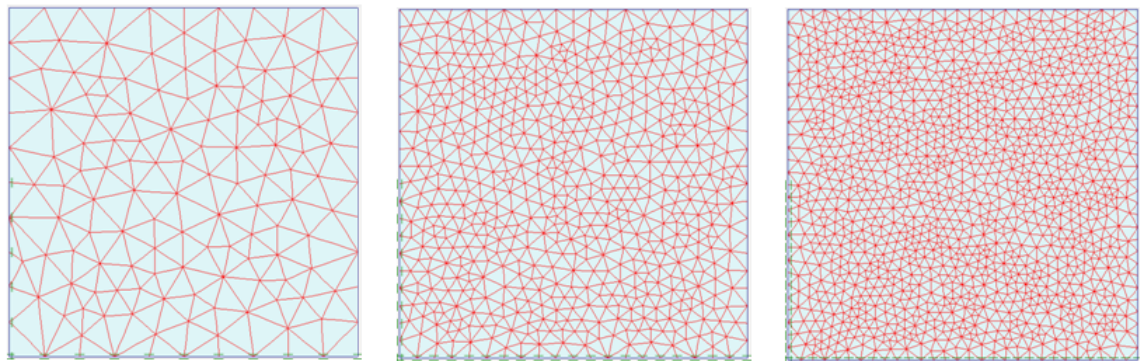


Figura 3.29: Discretização do bloco com entalhes no software *Plaxis* utilizando elementos T15, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.19: Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software *Plaxis* utilizando elementos T15.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c
1	T15	258	2713	15	17.280	1.152
2	T15	1238	13016	66	17.160	1.144
3	T15	2505	26337	73	17.000	1.133
4	T15	4950	52043	183	16.970	1.131
5	T15	10377	109101	496	16.960	1.131
6	T15	16115	169429	-	-	-

Apresenta-se agora os resultados obtidos na análise incremental, malhas T15 no software *Plaxis*, nomeadamente para a malha 4, no que diz respeito à deformada e campo de tensões do bloco, no instante de colapso, podendo ser consultados na Figura 3.30 e 3.31, respectivamente.

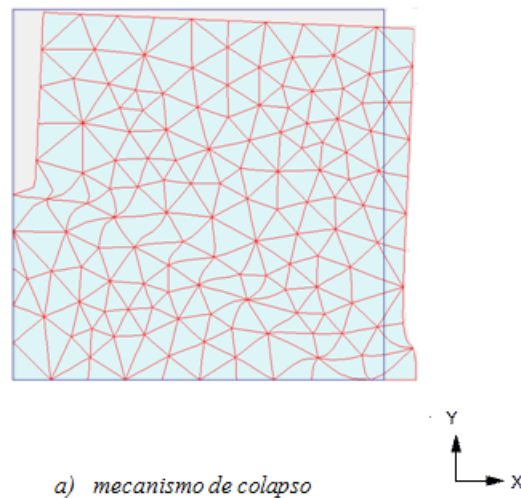


Figura 3.30: Mecanismo de colapso para o problema do bloco com entalhes no software *Plaxis* utilizando elementos T15.

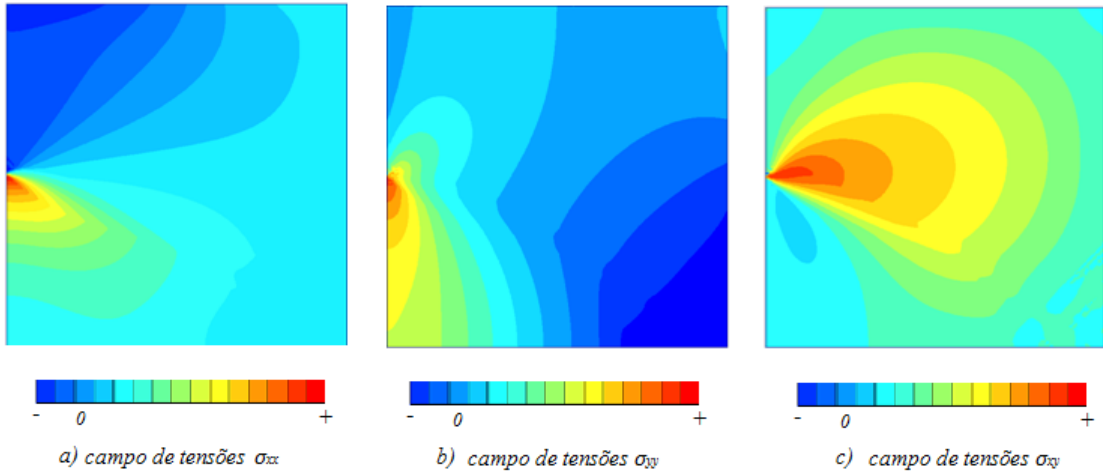


Figura 3.31: Campo de tensões para o problema do bloco com entalhes no software *Plaxis* utilizando elementos T15.

3.4.3 Modelação em *SUBLIM3d*

Neste estudo foi utilizado um material regido pelo critério de cedência de Tresca, para uma coesão, $c = \sigma_0/2$. Ao escolher este tipo de material, o programa assume que estamos num caso de EPD. Para efeitos de comparação, serão apresentados dois estudos diferentes, um utilizando malhas triangulares de três nós e outro utilizando malhas triangulares de seis nós. A nomenclatura utilizada nos estudos anteriores será também aplicada neste caso, no que diz respeito a malhas triangulares de três nós, T3, e malhas triangulares de seis nós, T6.

Como foi referido no problema anterior, análises em EPD suscitam problemas relacionados com fenómenos de locking. Para combater tais efeitos, serão utilizadas malhas estruturadas de elementos triangulares na análise do bloco com entalhes.

A nomenclatura utilizada neste estudo coincide com a utilizada no estudo anterior, sendo as siglas T3, representativas de elementos triangulares de três nós e as siglas T6-E e T6-NE de elementos triangulares de seis nós, utilizando malhas estruturadas e não estruturadas, respectivamente.

3.4.3.1 Malhas triangulares de três nós

Utilizaram-se seis malhas estruturadas diferentes. Algumas das malhas utilizadas podem ser visualizadas na Figura 3.32. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.20.

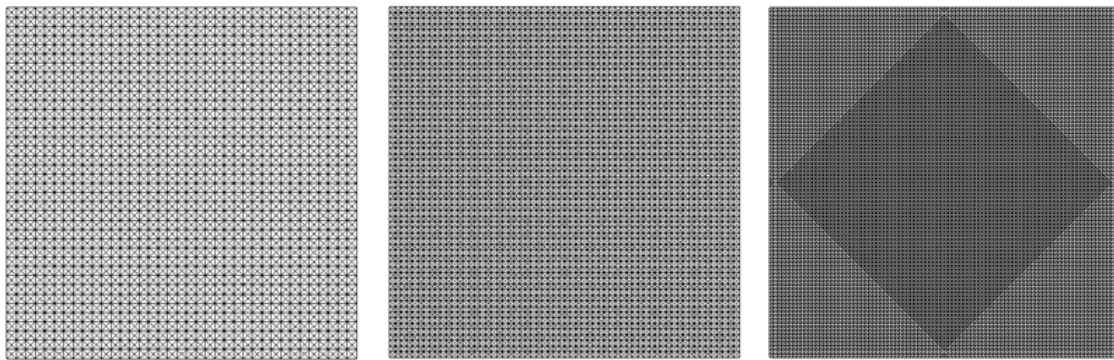


Figura 3.32: Discretização do bloco com entalhes no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.20: Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T3.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c
1	T3	3600	3675	1	17.725	1.182
2	T3	10000	10125	3	17.508	1.167
3	T3	20736	20916	9	17.489	1.166
4	T3	40000	40250	17	17.425	1.162
5	T3	89400	89774	53	17.386	1.159
6	T3	143640	144114	109	17.353	1.157

3.4.3.2 Malhas triangulares de seis nós (T6-E)

Utilizaram-se seis malhas estruturadas diferentes. Algumas das malhas utilizadas podem ser visualizadas na Figura 3.33. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.22.

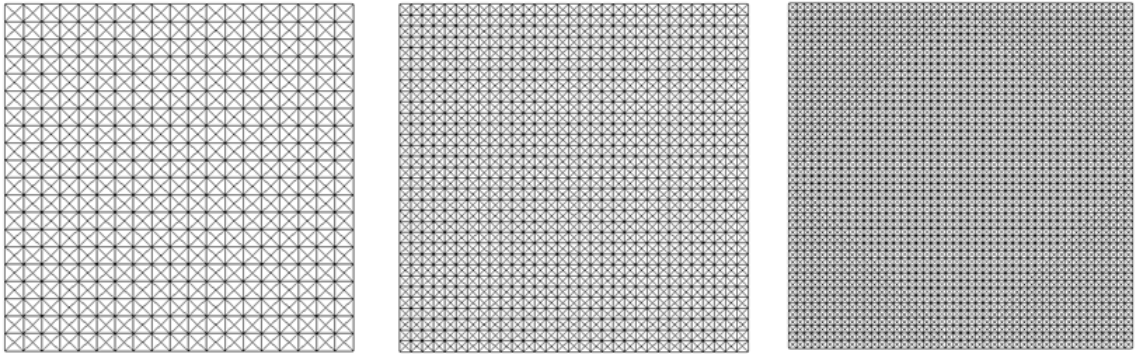


Figura 3.33: Discretização do bloco com entalhes no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6-E, para as três primeiras malhas estudadas.

Tabela 3.21: Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6-E.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c
1	T6-E	960	3918	1	17.719	1.181
2	T6-E	2600	10528	2	17.568	1.171
3	T6-E	5184	20916	5	17.478	1.165
4	T6-E	10000	40250	13	17.379	1.159
5	T6-E	22800	91578	46	17.352	1.157
6	T6-E	36480	146398	106	17.228	1.149

Os resultados referentes à dissipação plástica nos diferentes elementos podem ser observados na Figura 3.34, correspondentes à última malha estudada. Na mesma figura pode ser também observado o mecanismo de colapso do bloco com entalhes.

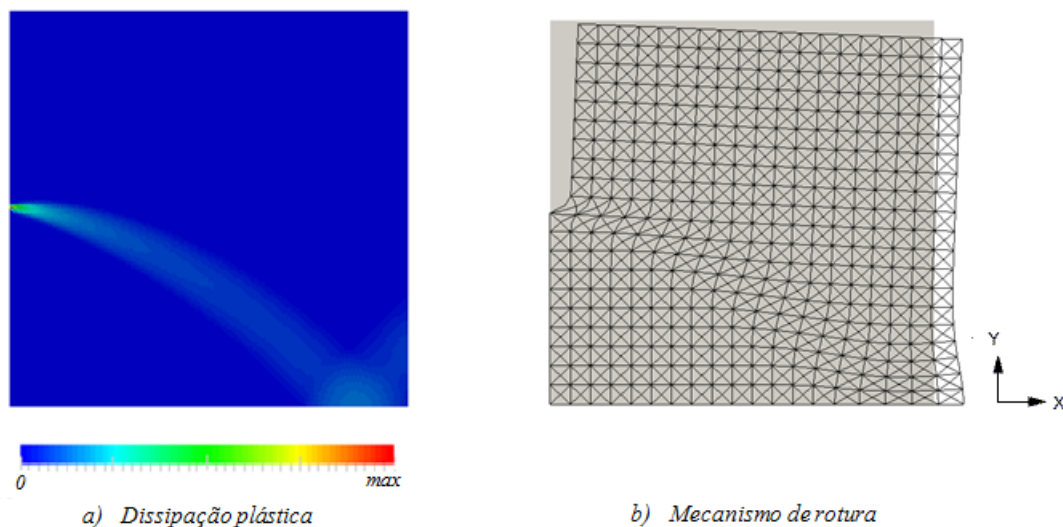


Figura 3.34: Dissipação plástica e mecanismo de colapso para o problema do bloco com entalhes no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6.

3.4.3.3 Malhas triangulares de seis nós (T6-NE)

Nesta secção serão estudadas seis malhas não estruturas de elementos triangulares de seis nós. Estas malhas correspondem às analisadas anteriormente no software *ANSYS* e podem ser visualizadas na Figura 3.27. Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, estes podem ser consultados na Tabela 3.22.

Tabela 3.22: Resumo das análises para o problema do bloco com entalhes no software *SUBLIM3d* utilizando elementos T6-NE.

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL	Tempo (s)	Pu (MPa)	Pu/c
1	T6-NE	884	3636	2	17.863	1.191
2	T6-NE	2552	10378	5	17.605	1.174
3	T6-NE	5620	22730	13	17.526	1.168
4	T6-NE	10162	40986	28	17.529	1.169
5	T6-NE	22972	92388	77	17.412	1.161
6	T6-NE	35866	144092	154	17.356	1.157

Capítulo 4

Análise dos Resultados

Neste capítulo serão alvo de uma análise mais detalhada os principais resultados, obtidos nos estudos efectuados no capítulo anterior. Para melhor percepção do leitor, efectuar-se-à a divisão deste capítulo em quatro partes, cada uma correspondente aos problemas estudados. Os resultados serão agora apresentados conjuntamente e comparados com estudos já desenvolvidos, quer em termos de solução exacta, se tal for o caso, quer em termos de limites superiores e inferiores, obtidos por outros autores. Para efeitos de comparação os resultados serão exibidos na sua forma adimensional.

4.1 Placa com furo (EPT)

Esta primeira análise de resultados diz respeito ao primeiro problema estudado, que consiste numa placa fina com um furo circular, submetida a um carregamento uni-axial. Este é um exemplo clássico bastante corrente e a sua solução exacta é conhecida, para uma relação de $D/L = 0.2$ [8]. Os resultados obtidos para a carga de colapso da placa podem ser observados na Figura 4.1 e para o tempo de cálculo na Figura 4.2. Estes gráficos resultam da associação das Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, apresentadas no capítulo anterior.

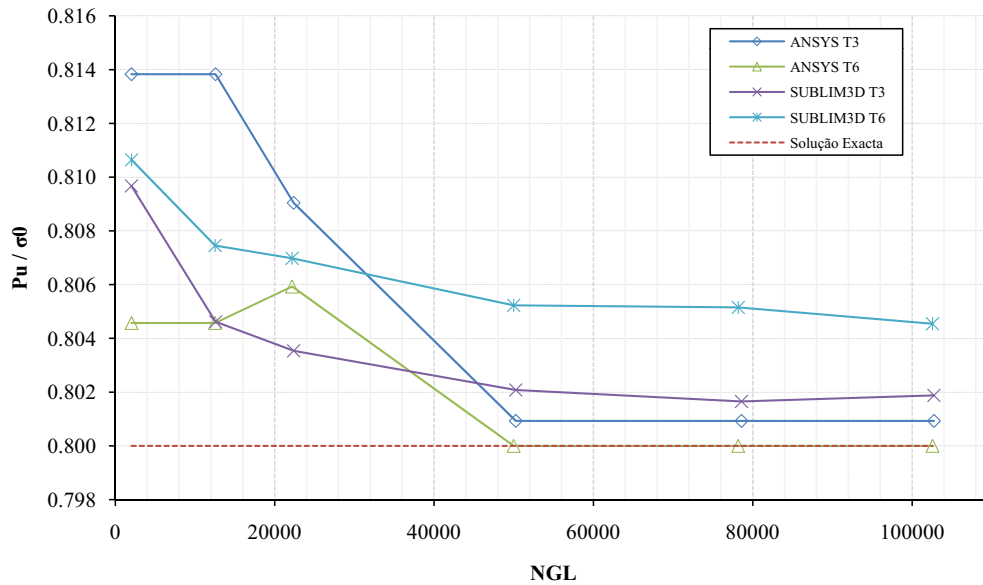


Figura 4.1: Placa com furo: Convergência da solução.

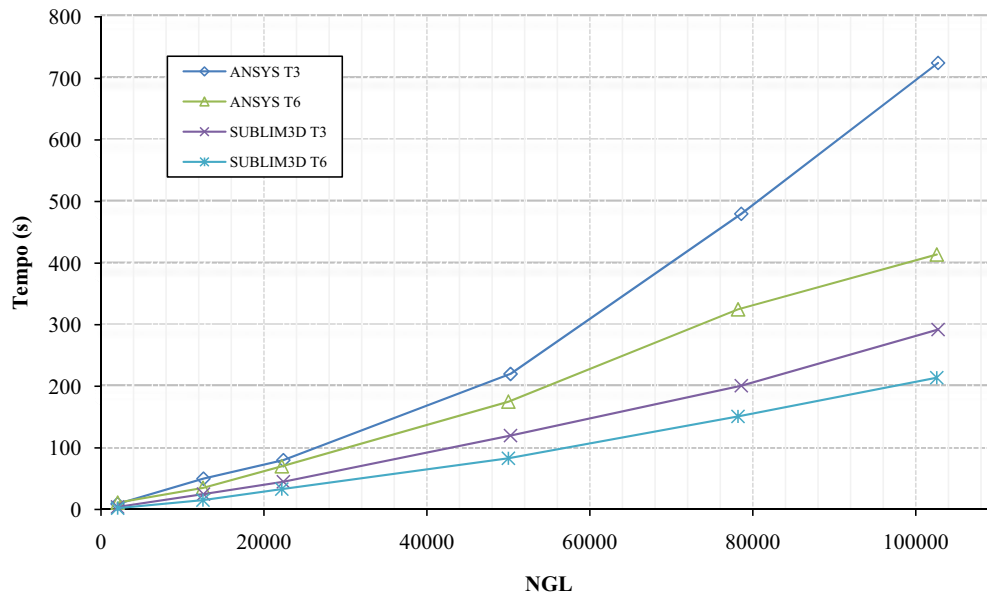


Figura 4.2: Placa com furo: Tempo de cálculo.

Neste primeiro estudo verifica-se que naturalmente a qualidade da aproximação da carga de colapso da placa foi melhorando à medida que se aumentou o grau de discretização das malhas, tanto na análise incremental como na análise limite. Observa-se também que foi através de uma análise incremental no software *ANSYS*, utilizando malhas T6, que se obtiveram os melhores resultados, chegando mesmo

à solução exacta da carga de colapso. Globalmente obtiveram-se valores para a estimativa da carga de colapso bastante bons, especialmente através de uma análise elasto-plástica incremental, a partir de malhas com aproximadamente 50000 graus de liberdade.

Note o leitor que, na análise elasto-plástica incremental utilizando elementos T6, verificou-se uma perda de qualidade inesperada na malha 3. Tal pode justificar-se com o facto de a configuração da malha, para este número de graus de liberdade, ser menos precisa na configuração do mecanismo de rotura. Quer-se com isto dizer que eventualmente existem menos nós sobre a linha de rotura da placa, traduzindo-se numa menor qualidade da aproximação da carga última.

É interessante analisar o facto de os resultados obtidos através do software *ANSYS* aproximarem-se da solução exacta por valores superiores a esta. Este acontecimento era espectável à partida, no sentido que este tipo de softwares de elementos finitos verificam as condições de compatibilidade entre elementos, em todo o domínio. Ora, este é pressuposto base da formulação do teorema cinemático da análise limite, onde se procura um mecanismo cinematicamente admissível. Por outro lado, os resultados obtidos por estes softwares de análise incremental diferem dos obtidos pelo *SUBLIM3d*, dado que na sua formulação, o princípio da normalidade é apenas verificado para alguns pontos do domínio do problema, ao contrário do software *SUBLIM3d* que fornece uma solução estrita do teorema da região superior.

Em termos de eficiência dos diferentes métodos, observa-se que a análise limite é sem dúvida a melhor solução, salientando-se as malhas T6 calculadas através do *SUBLIM3d*. Estas apresentam resultados muito bons, cerca de menos duas a três vezes do tempo de processamento de uma análise incremental. A análise menos eficiente trata-se da obtida pelo processo incremental, utilizando malhas T3. Conclui-se também que quer na análise limite quer na análise incremental, o número de elementos influencia o tempo de processamento, para igual número de graus de liberdade, acabando por as malhas T6 serem sempre mais eficientes que as malhas T3, nos respectivos métodos.

A análise limite forneceu valores interessantes, mas menos precisos do que os obtidos na análise elasto-plástica incremental. Verifica-se que as malhas T3 forneceram melhores resultados que as malhas T6. Pode-se encontrar justificação para este acontecimento no facto referido no capítulo anterior, relativamente ao parâmetro

multiplicador pelas funções de aproximação, r_0 , em que não existe matematicamente um valor exacto para este. Os resultados apresentados na Figura 4.3 são referentes a este mesmo estudo efectuado e são fruto da associação das Tabelas 3.1, 3.2, 3.5 e 3.6, do capítulo anterior.

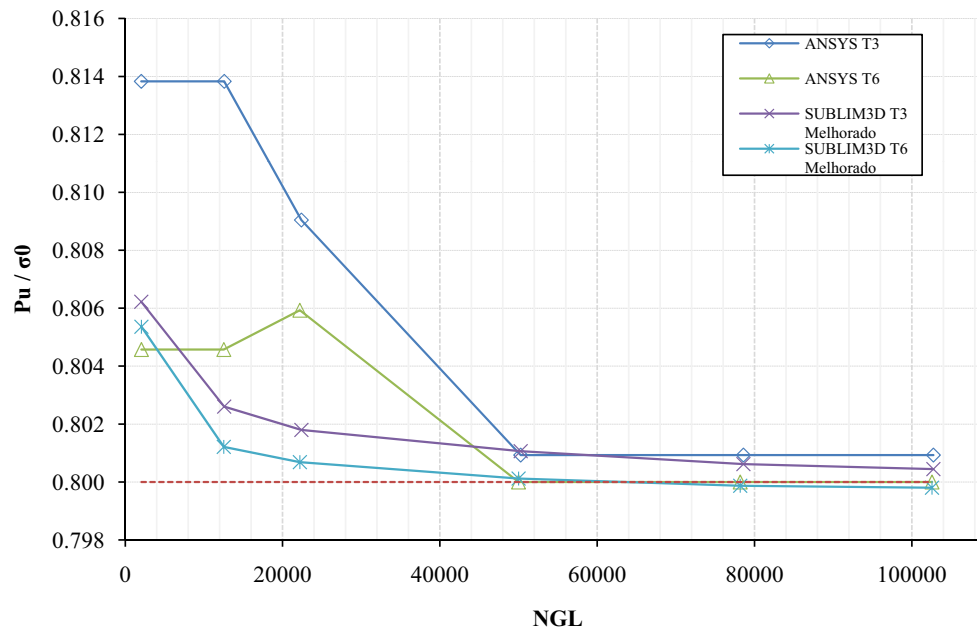


Figura 4.3: Placa com furo: Convergência da solução.

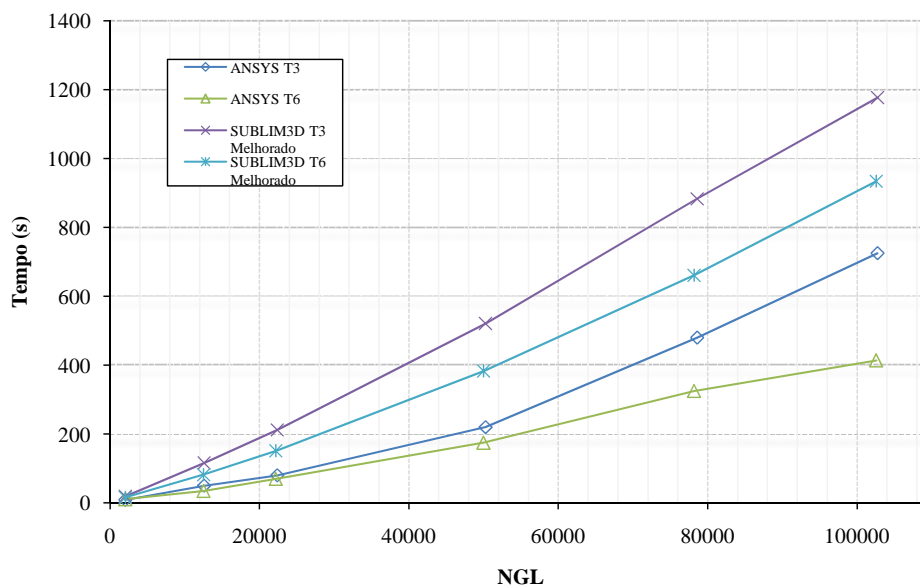


Figura 4.4: Placa com furo: Tempo de cálculo.

Tal como se esperava, neste segundo estudo comprova-se a influência do parâmetro r_0 , na qualidade da solução da carga de colapso da placa. De facto, conseguiu-se um melhoramento substancial, de tal forma que os resultados da carga de colapso obtidos através de uma análise limite são agora melhores que os obtidos na análise incremental. Além disso, comprova-se que no *SUBLIM3d*, o facto de as malhas T3 fornecerem inicialmente melhores aproximações da carga última que as malhas T6, é também proveniente da influência deste parâmetro.

Por outro lado, em termos de eficiência obtiveram-se resultados inversos. Estes resultados podem ser consultados na Figura 4.4. Já era esperado que um melhoramento da aproximação da carga última se traduzisse num maior tempo de processamento, assumindo-se então a análise limite como o método menos eficiente, quando alterado o parâmetro r_0 .

4.2 Viga em consola (EPT)

Este segundo estudo efectuado debruçou-se sobre a determinação de carga última de corte na extremidade de uma viga em consola. O material foi regido segundo o critério de cedência de von Mises, nos diferentes tipos de softwares. É importante referir que a solução exacta deste problema não é conhecida, apesar de alguns autores terem efectuado estudos, utilizando os teoremas da análise limite, na determinação da estimativa da carga de colapso deste problema [11].

Os resultados obtidos para a carga de colapso da viga podem ser observados na Figura 4.5 e para o tempo de cálculo na Figura 4.6. Estes gráficos resultam da associação das Tabelas 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10, do capítulo anterior.

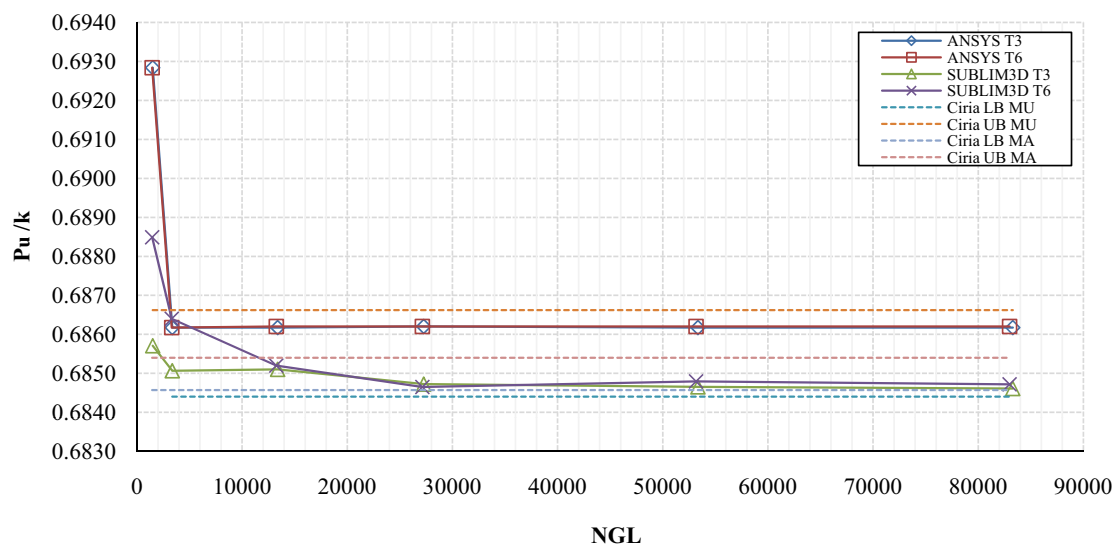


Figura 4.5: Viga em consola: Convergência da solução.

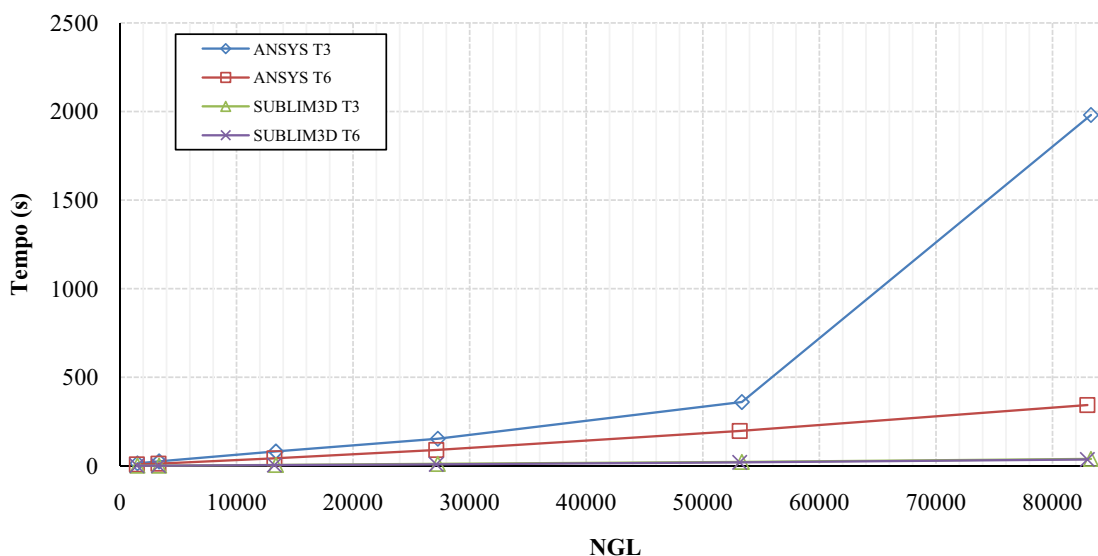


Figura 4.6: Viga em consola: Tempo de cálculo.

Em primeiro lugar, refere-se que os limites superiores e inferiores apresentados para a carga de colapso desenvolvidos por H.Ciria *et al*[11] são limites estritos e foram obtidos através do uso de malhas estruturadas de elementos triangulares de três nós, com refinamento uniforme e com refinamento adaptativo. O resultado apresentado para esses limites foi o obtido pelos autores para a melhor malha desse tipo, onde as siglas Ciria LB representam o limite inferior da carga de colapso e as siglas Ciria UB representam o seu limite superior. As siglas MA são referentes a um refinamento

adaptativo e as siglas MU referem-se às malhas com refinamento uniforme. Apesar de terem sido utilizadas máquinas diferentes realça-se o tempo de processamento de 21 s, para uma malha uniforme de 8704 elementos, na estimativa do limite superior da carga de colapso e de 14 segundos para uma malha adaptativa de 5506 elementos no cálculo da mesma estimativa.

Neste estudo observa-se que globalmente a convergência foi conseguida em todos os estudos efectuados. Verifica-se que os resultados obtidos através de uma análise incremental no software *ANSYS* foram iguais quando utilizadas malhas de elementos triangulares de três e seis nós, fornecendo piores resultados comparativamente com as estimativas obtidas através da análise limite no *SUBLIM3d*.

Observe o leitor que, igualmente aos estudos anteriores, os resultados obtidos para a carga última de corte da viga no software *ANSYS*, aproximam-se do limite superior obtido anteriormente por H.Ciria *et al*[11], através da utilização de malhas uniformes, sendo inclusivamente superior aos resultados obtidos para malhas com refinamento adaptativo.

Por outro lado, os resultados obtidos através de uma análise limite foram bastante bons. Pede-se a atenção do leitor para o facto dos resultados obtidos serem inclusivamente melhores que as estimativas obtidas anteriormente por H.Ciria *et al*[11], para igual número de graus de liberdade, especialmente nas malhas T3. É de realçar o facto de neste estudo apenas terem sido utilizadas malhas com refinamento uniforme, o que significa que o software *SUBLIM3d* superou os resultados de malhas uniformes e malhas adaptativas de estudos anteriores.

Tratando-se de estimativas do limite superior, as fornecidas pelo *SUBLIM3d*, pode-se concluir que a gama de valores para a solução exacta da carga de colapso da viga se situa entre 0.68457 (Ciria LB MA) e 0.68461 (SUBLIM3D T3). Para melhor percepção do leitor, apresenta-se de seguida a Figura 4.7, onde podem ser visualizados, a uma escala mais reduzida, os valores anteriormente referidos.

Note o leitor que, na malha 3 de elementos T3, verificou-se uma perda de qualidade inesperada. Tal pode justificar-se com o facto de a configuração da malha, para este número de graus de liberdade, ser menos precisa na configuração do mecanismo de rotura. Quer-se com isto dizer que eventualmente existem menos nós sobre a linha de rotura da viga, traduzindo-se numa menor qualidade da aproximação da carga última. Tal factor também aconteceu anteriormente na determinação da carga de

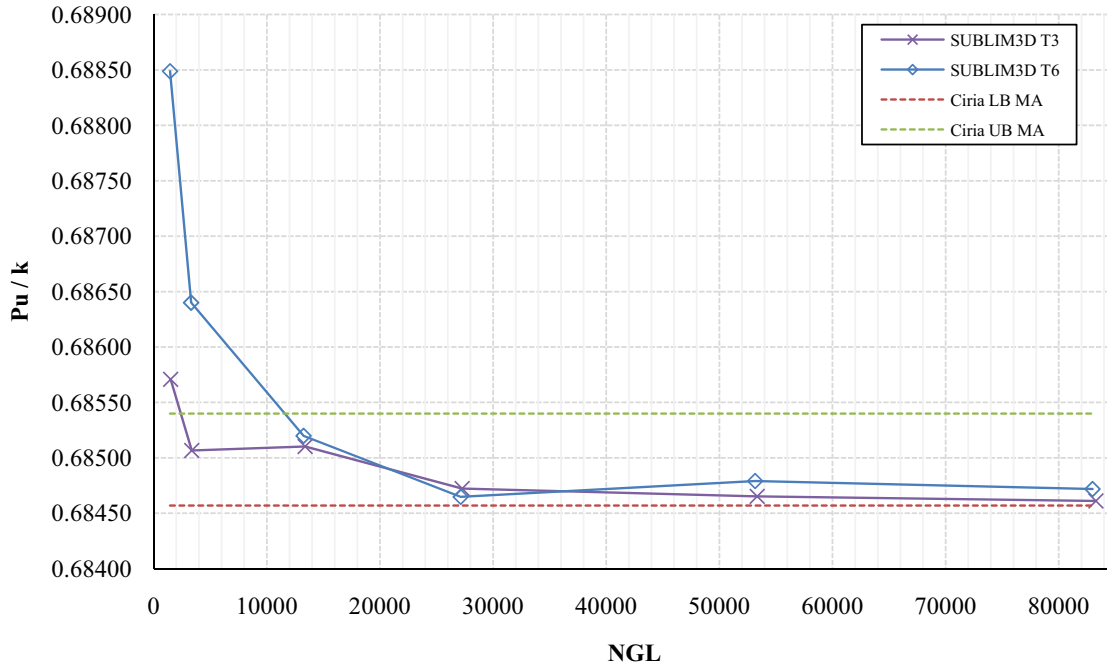


Figura 4.7: Viga em consola: Comparação da convergência da solução obtida através de uma análise limite e estudos anteriores [11].

colapso da placa com o furo circular, apresentando-se na altura a mesma justificação para este acontecimento.

Em termos de eficiência da solução destaca-se o péssimo desempenho das malhas T3, através de uma análise elasto-plástica incremental no software *ANSYS*. Aponta-se para tal acontecimento o elevado número de elementos, apesar de igual número de graus de liberdade entre as diferentes malhas. Tal já não acontece para as malhas T6 neste mesmo tipo de análise, apresentando mesmo assim tempos de cálculo nada competitivos comparativamente com os obtidos através da análise limite no software *SUBLIM3d*. A análise limite fornece assim os melhores tempos de processamento, apresentando resultados muito semelhantes quando utilizadas malhas T3 e T6. Comparativamente com tempos de processamento de estudos anteriores, verifica-se que apesar de máquinas¹ diferentes, existe uma melhor eficiência quando utilizado o software *SUBLIM3d*. Contudo, esta comparação não é justa, pois o processador da máquina utilizada neste trabalho é bastante melhor.

¹Ciria *et al* [11]:Processador: Intel Pentium 4 2.53 GHz, Memória(RAM): não especificado, Sistema Operativo: não especificado; A máquina utilizada neste trabalho foi detalhada no capítulo anterior.

4.3 Capacidade de carga de fundações superficiais (EPD)

Esta análise diz respeito ao estudo realizado sobre a determinação da capacidade de carga de fundações superficiais. Foi objecto de análise a carga de colapso de sapata rectangular flexível de comprimento infinito, sujeita a uma carga uniformemente distribuída na vertical, com um comportamento do solo em condições não drenadas. O solo foi regido pelo critério de cedência de von Mises, utilizando o software *ANSYS* e pelo critério de cedência de Tresca utilizando o software *Plaxis* e *SUBLIM3d*.

A solução exacta da carga de colapso da sapata é conhecida para os casos de comportamento do solo não drenado e quando sujeita a um carregamento vertical e centrado [16]. Os resultados obtidos podem ser observados na Figura 4.8 e 4.9. Estes resultados são fruto da associação das Tabelas 3.11, 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15, do capítulo anterior.

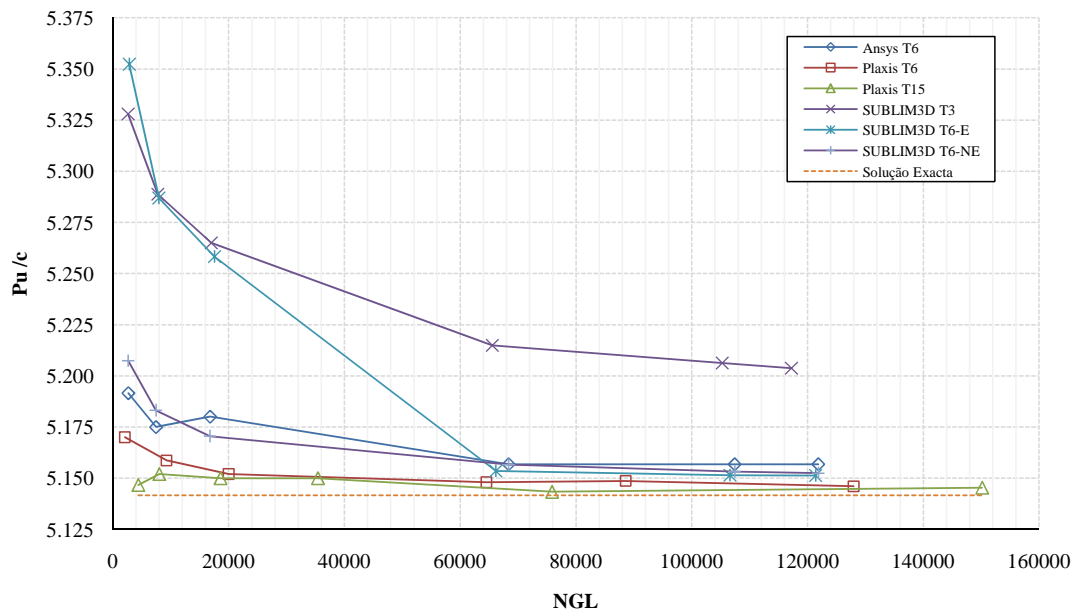


Figura 4.8: Sapata rectangular: Convergência da solução.

Neste terceiro estudo observa-se que globalmente conseguiu-se atingir a convergência de aproximações da carga de colapso da sapata, à excepção de malhas T3 no *SUBLIM3d*, apontando-se a possível influência do parâmetro r_0 neste aspecto. Em termos de qualidade da solução salientam-se os resultados obtidos através da utiliza-

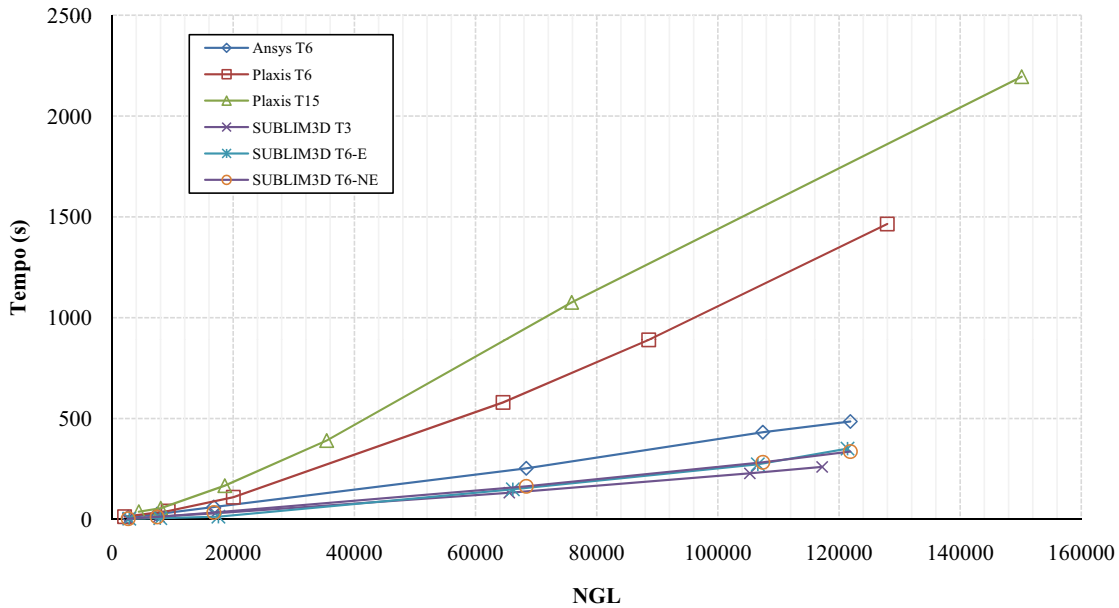


Figura 4.9: Sapata rectangular: Tempo de cálculo.

ção das malhas T15 no software *Plaxis*. Destaca-se o facto de os resultados obtidos através da utilização das malhas T6 na análise limite terem fornecido melhores aproximações que as malhas T3 na análise elasto-plástica incremental. Observe o leitor mais uma vez que a convergência das estimativas da carga de colapso obtidas através das diversas análises incrementais, quer utilizando o software *ANSYS* quer o software *Plaxis*, é alcançada por valores superiores à solução exacta, pelas mesmas razões apresentadas no estudo anterior.

Como foi referido anteriormente, devido ao progressivo aumento do erro verificado na análise limite da carga de colapso, utilizando elementos T6-E e T6-NE, efectuou-se a alteração do parâmetro de penalidade, no sentido de melhorar a qualidade das soluções obtidas. No primeiro caso, malhas T6-E, efectuou-se esta alteração nas três últimas malhas e no segundo caso, malhas T6-NE, efectuou-se esta alteração em todas as malhas. Assim, a comparação destas malhas apenas pode ser efectuada para as três últimas malhas. Estas apresentam resultados muito semelhantes, não sendo assim possível destacar qual obteve um melhor desempenho.

No que diz respeito à eficiência destaca-se com melhor tempo de processamento a análise das malhas T3, realizadas através do software *SUBLIM3d*. Este facto deve-se essencialmente à não alteração do parâmetro de penalidade r_0 . Por outro

lado, naturalmente se observa que houve um decréscimo de desempenho em termos de tempo de processamento, por parte das malhas T6 neste mesmo software. Este facto deve-se à alteração do parâmetro r_0 , com o intuito de melhorar os valores das aproximações da carga de colapso, devido à ocorrência de uma perda significativa da qualidade da solução. Observa-se que, no campo da análise elasto-plástica incremental, o software *Plaxis* apresenta piores resultados de tempo de processamento do que o software *ANSYS*, piorando com o aumento do número de nós dos elementos.

4.4 Bloco com entalhes (EPD)

Neste último problema faz-se a análise dos resultados obtidos do estudo da carga de colapso de um bloco com entalhes, sujeito a uma carga distribuída uni-axial de tracção. A solução exacta deste problema não é conhecida mas alguns autores determinaram os seus limites superiores e inferiores usando os teoremas da análise limite [11], [12]. O material utilizado segue o critério cedência de von Mises, utilizando o software *ANSYS* e pelo critério de cedência de Tresca utilizando o software *Plaxis* e *SUBLIM3d*. Recorda-se o leitor que esta análise foi efectuada para um comportamento do bloco em estado plano de deformação.

Como foi referido no capítulo anterior, não foi possível analisar a malha 6 de elementos T15 por insuficiência de memória da máquina. Os resultados obtidos podem ser observados nas Figuras 4.10 e 4.11. Estes resultados são fruto da associação das Tabelas 3.17, 3.18, 3.19, 3.20 e 3.22, do capítulo anterior.

Em primeiro lugar, refere-se que os limites superiores e inferiores apresentados para a carga de colapso desenvolvidos por H.Ciria *et al*[11] são limites estritos e foram obtidos através do uso de malhas estruturadas de elementos triangulares de três nós, com refinamento uniforme e com refinamento adaptativo. O resultado apresentado para esses limites foi o obtido pelos autores para a melhor malha desse tipo, onde as siglas Ciria LB representam o limite inferior da carga de colapso e as siglas Ciria UB representam o seu limite superior. As siglas MA são referentes ao refinamento adaptativo e as siglas MU referem-se às malhas de refinamento uniforme.

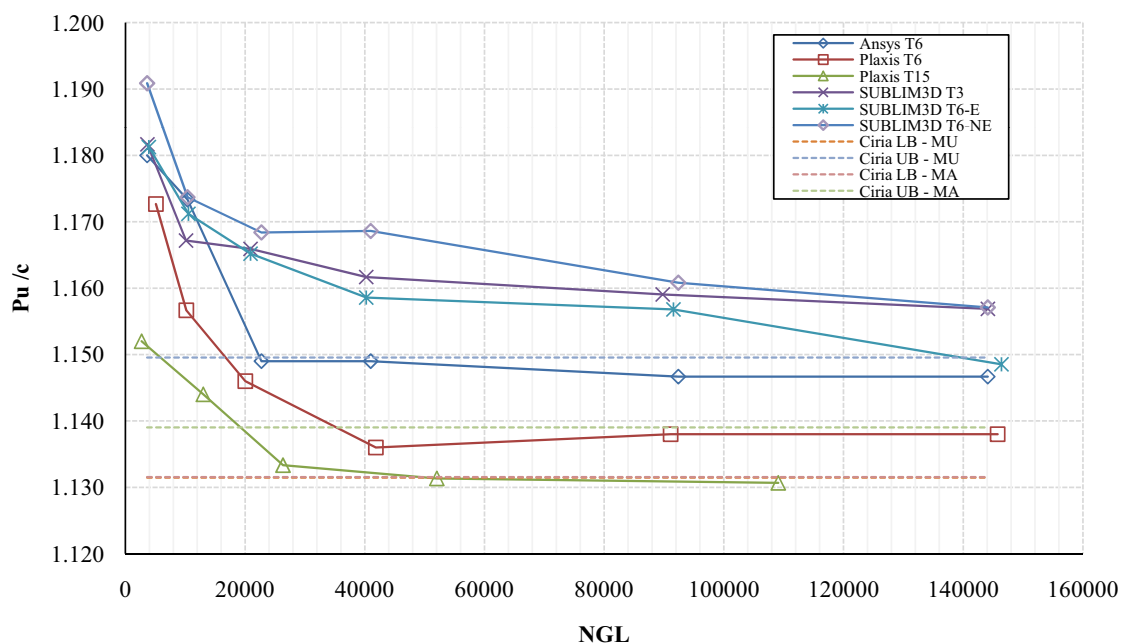


Figura 4.10: Bloco com entalhes: Convergência da solução.

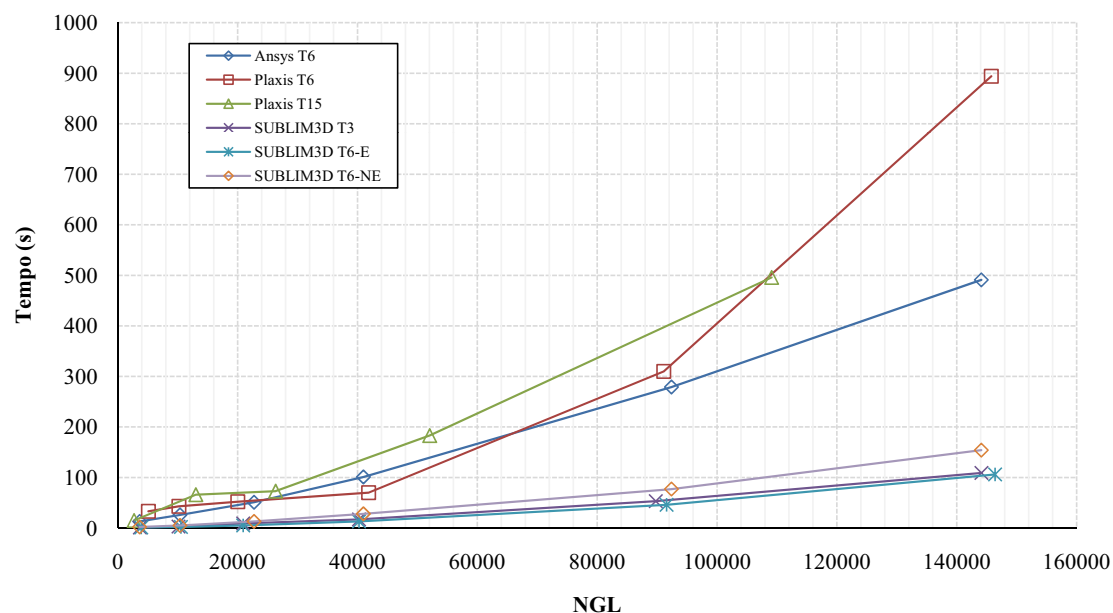


Figura 4.11: Bloco com entalhes: Tempo de cálculo.

Apesar de terem sido utilizadas máquinas¹ diferentes realça-se o tempo de processamento de 38 segundos, para uma malha uniforme de 4906 elementos, na estimativa do limite superior da carga de colapso e de 56 segundos para uma malha adaptativa de 5913 elementos no cálculo da mesma estimativa.

Observa-se efectivamente que a análise limite, realizada através do software *SUBLIM3d*, não produziu resultados tão bons comparativamente com os obtidos na análise elasto-plástica incremental. É interessante verificar mais uma vez tal como nos exemplos anteriores, a tendência natural do software *ANSYS* na convergência das aproximações da carga última por valores próximos do seu limite superior, apresentando-se inclusivamente acima do limite superior obtido por H.Ciria *et al*[11] através de malhas adaptativas. Observe o leitor que tal já não acontece com os resultados obtidos através do software *Plaxis*, especialmente com as malhas T15.

Em termos de qualidade da aproximação destaca-se os resultados obtidos nas malhas T6 e T15 através de uma análise elasto-plástica incremental no software *Plaxis*, dado que estes encontram-se compreendidos entre os melhores valores de limite superior e inferior carga de colapso do bloco, obtidos em estudos anteriores. Tal como foi dito nos exemplos anteriores, aponta-se a influência do parâmetro r_0 na menor qualidade dos valores obtidos através da análise limite realizada no *SUBLIM3d*. Contudo, e apesar de se ter obtido resultados não muito satisfatórios, destaca-se as malhas T3 neste tipo de análise, pois foram as únicas a garantir a convergência da solução da carga de colapso. Globalmente obtiveram-se bons resultados, destacando-se o facto do erro relativo ser bastante pequeno.

Observa-se que a análise limite forneceu os melhores resultados em termos de rapidez de processamento, destacando-se ligeiramente as malhas de elementos T3 e T6-E. Apesar de não ser possível efectuar uma comparação entre malhas de elementos T6-E e T6-NE, no que diz respeito à qualidade da solução obtida para a carga de colapso, tal é possível no que diz respeito ao tempo de cálculo. Observa-se que, as malhas de elementos T6-E apresentam tempos de cálculo ligeiramente melhores que os das malhas de elementos T6-NE. Aponta-se a organização das malhas de elementos T6-E como possível razão para um melhor desempenho, apesar de tal não se ter verificado no exemplo anterior, também numa análise de EPD. Realça-se o bom desempenho destas análises comparativamente com o tempo de processamento de estudos anteriores, para graus de liberdade equivalentes. O software *SUBLIM3d* conseguiu tempos de processamento de 7 segundos para malhas T3 e 4s para malhas

T6, valores consideravelmente melhores do que os 38 segundos das malhas uniformes e 56s das malhas adaptativas, apesar da utilização de máquinas diferentes. Tal como foi visto em estudos anteriores o pior tempo de processamento regista-se nas análises realizadas no software *Plaxis*.

Capítulo 5

Conclusões e desenvolvimentos futuros

O principal objectivo deste trabalho consistiu na determinação de cargas de colapso de problemas bidimensionais e a sua respectiva eficiência, através de dois métodos distintos. O primeiro método assumiu-se pela determinação da carga última através de uma análise elasto-plástica incremental do carregamento, utilizando dois softwares comerciais diferentes, nomeadamente o software *ANSYS* e o *Plaxis*. Por outro lado, determinou-se a mesma carga através de uma análise que tem como base o teorema cinemático da análise limite, utilizando o software *SUBLIM3d*, desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil, da Universidade Nova de Lisboa-Faculdade de Ciências e Tecnologia.

No capítulo anterior foram analisados os resultados obtidos em cada um dos problemas, quer em termos de qualidade da solução, quer em termos da sua respectiva eficiência, havendo também sido feitas comparações com resultados obtidos por outros autores em estudos anteriores a este. Contudo, não foi discutido de forma global as principais vantagens dos dois métodos, sendo este o assunto principal a ser discutido de seguida.

Em primeiro lugar, realça-se a vantagem de a análise incremental permitir a obtenção da deformada e campo de tensões, ao longo de toda a história do carregamento. Por outro lado, a resolução do problema através de uma análise limite apenas permite obter estes efeitos, no instante de colapso, não se podendo assim acompanhar ao

longo do carregamento o comportamento da estrutura.

No cálculo da carga de colapso, a análise limite por seu lado permite obter tempos incomparavelmente mais eficientes que os obtidos através de uma análise incremental de carga, não perdendo qualidade na solução final. Este aspecto assume-se assim como uma ferramenta bastante competitiva e importante na realização deste tipo de estudos.

Analisando mais particularmente os diversos softwares utilizados, destacam-se alguns aspectos interessantes de referir. Efectuando uma análise elasto-plástica incremental no software *ANSYS* observa-se o facto de os resultados obtidos aproximarem-se da solução exacta por valores superiores a esta. Por outro lado, os resultados obtidos no software *Plaxis* fornecem valores abaixo da carga de colapso. Como foi referido anteriormente, estes acontecimentos eram espectáveis à partida, no sentido que este tipo de softwares de elementos finitos não fornecem limites estritos da carga de colapso. Quer-se com isto dizer que, o facto de estes verificam as condições de compatibilidade entre elementos, em todo o domínio e a condição de normalidade apenas para alguns pontos deste, faz com que as soluções obtidas possam fornecer resultados mais próximos quer dos limites superiores, quer dos limites inferiores da carga de colapso. Acrescenta-se também que os resultados obtidos nestes softwares diferem dos obtidos através de uma análise limite da carga de colapso utilizando o software *SUBLIM3d*, pois este fornece uma soluções estritas do teorema da região superior.

A este facto, acresce um problema comum a todos os softwares, que se verificou neste trabalho. Note o leitor que, em casos de estados planos de deformação, os softwares fornecem piores aproximações da carga de colapso, especialmente o software *SUBLIM3d*, quando utilizadas malhas de elementos triangulares de três nós. Por outro lado, o software *Plaxis* assumiu-se neste trabalho como o ideal para a resolução de problemas em EPD, muito provavelmente pelo facto de o seu algoritmo apenas permitir a realização deste tipo de análises, ao contrário dos outros softwares aqui analisados, estando assim de alguma forma optimizado para análises em EPD.

Como foi referido anteriormente, o *SUBLIM3d* para fornecer limites estritos da carga de colapso, para além de garantir a compatibilidade em todos os nós, é também necessário garantir que a condição de normalidade seja verificada em todo o domínio. A imposição desta última restrição, quando utilizados elementos com poucos graus

de liberdade, resulta numa perda significativa da qualidade da solução final. Isto resulta do facto de o traço do tensor da taxa de deformação ser obrigatoriamente nulo, em toda a superfície de rotura, ou seja, tornando-a incompressível. No caso de estados planos de deformação, onde $\varepsilon_{33} = 0$, as deformações nos dois eixos principais têm de ser simétricas, resultando assim na condição $\dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varepsilon}_y$. Logo, tanto na análise elasto-plástica incremental, como na análise limite, a menor qualidade obtida na determinação da carga de colapso utilizando elementos com poucos graus de liberdade, é um problema comum, no sentido em que é mais complicado definir este elevado número de restrições. No caso de estados de tensão plana tal já não acontece, pois $\varepsilon_{33} \neq 0$, conseguindo com isto um ganho de mais um grau de liberdade efectivo na malha.

5.1 Desenvolvimentos futuros

Após a realização deste trabalho existe um conjunto de assuntos que se considera interessantes e que possivelmente resultem em trabalhos futuros. Deste modo, o estudo da influência e optimização do parâmetro r_0 utilizado como multiplicador das funções de aproximação no software *SUBLIM3d*, para o qual não existe matematicamente um valor exacto, assume-se como um trabalho interessante e que poderá conduzir a um melhoramento deste software.

No seguimento deste trabalho, outro trabalho interessante passa pelo estudo da eficiência do método incremental e da análise limite, associado agora a problemas tridimensionais.

Existe também ainda trabalho a efectuar no que diz respeito à aplicação do *SUBLIM3d* a problemas de aplicação prática na área da Engenharia Civil.

Bibliografia

- [1] *Software ANSYS versão 11.0*, <<http://www.ansys.com/>> visitado a 12 de Abril de 2011.
- [2] *Software Plaxis versão 8.2*, <<http://www.plaxis.nl/>> visitado a 12 de Abril de 2011.
- [3] *Software Sublim3D*, <<http://www.dec.fct.unl.pt/projectos/SUBLIM3d/>> visitado a 12 de Abril de 2011.
- [4] *TNO DIANA - Analysis and Design (2003)*. <<http://tnodiana.com/node/369>> visitado a 25 de Março de 2011.
- [5] *CEN: Eurocode 7: geotechnical design - part 1: general rules. European Pre-standard ENV 1997-1. CEN (Comité Européen de Normalisation), Brussels, 2001.*
- [6] F.A. Gaydon e A.W. McCrum: *A theoretical investigation of the yield-point loading of a square plate with a central circular hole*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 2:156–169, 1954.
- [7] J. Chakrabarty: *Theory of Plasticity*. McGraw-Hill - New York, 1987.
- [8] F.A. Gaydon: *On the yield-point loading of a square plate with concentric circular hole*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2:170–176, 1954.
- [9] C. W. Gear: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1971.
- [10] Nuno Guerra: *Acetatos de Análise de Estruturas Geotécnicas*. Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil.

- [11] J. Peraire e J. Bonet H. Ciria: *Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75:899–944, 2008.
- [12] Edmund Christiansen e Knud D. Andersen: *Computation of collapse states with von Mises type yield condition*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46:1185–1202, 1999.
- [13] R. M. Natal Jorge e L. M. J. S. Dinis: *Teoria da Plasticidade*. Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2004/2005.
- [14] Kristian Krabbenhoft e Lars Damkilde: *A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56:165–184, 2003.
- [15] M. Heitzer e M. Staat: *Basis reduction technique for limit and shakedown problems. In Numerical Methods and Shakedown Analysis, Deterministic and Probabilistic Problems*. Publication Series of the John von Neuman Institute for Computing (NIC), 15:1–51, 2003.
- [16] G. G. Meyerhof: *The Ultimate Bearing Capacity of Foundations*. Department of Scientific and Industrial Research, páginas 301–332, 1951.
- [17] Dorival de Moraes Pedroso: *Modelos elastoplásticos para solos argilosos: Capacidade de previsão de comportamento e integração da relação constitutiva*. Tese de Mestrado, Universidade de Brasília - Faculdade de Tecnologia, 2002.
- [18] G.H. Rahimi e R.A. Alashti: *Limit Load Analysis of Plates with a Hole Under in-Plane Loads*. Scientia Iranica, 12:442–454, 2005.
- [19] Mário Jorge Vicente da Silva: *Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite*. Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [20] S. W. Sloan: *Integration of Tresca and Mohr-Coulomb constitutive relations in plain strain elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33:163–196, 1992.
- [21] Karl Terzaghi: *Theoretical soil mechanics*. New York, 1947.

- [22] Khoi Vu Duc e Nguyen Dang Hung Yan Ai-Min: *Kinematical Formulation of Limit and Shakedown Analysis*. Publication Series of the John von Neuman Institute for Computing (NIC), 15:86–146, 2003.